МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ИНСТИТУТ СТРАТЕГИИ РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ
федеральное государственное бюджетное научное учреждение

ФИЗИКА
(углубленный уровень)
Реализация требований ФГОС среднего общего образования

Методическое пособие для учителя

Москва

2023

УДК 372.853
ББК 74.262.23
Ф50

Авторский коллектив:

А. А. Якута, канд. физ.-мат. наук, почетный работник воспитания и просвещения Российской Федерации, доц. кафедры общей физики ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», ст. н. с. ФГБНУ «Институт стратегии развития образования»

В. Т. Корнеев, ст. преп. кафедры физики и директор Центра довузовской подготовки ФГБОУ ВО «Белгородский государственный технологический университет имени В. Г. Шухова»

Г. Д. Корнеева, учитель физики высшей квалификационной категории МБОУ «Лицей № 10» г. Белгорода, заслуженный учитель Российской Федерации, почетный работник общего образования Российской Федерации

Е. Д. Кочергина, учитель физики ГБПОУ г. Москвы «Воробьевы горы»

Д. В. Подлесный, канд. пед. наук, заслуженный работник высшей школы Российской Федерации, народный учитель Республики Мордовия, учитель физики ГБОУ г. Москвы «Школа № 2044»

Т. В. Саушкина, учитель физики высшей квалификационной категории ГБОУ Республики Мордовия «Республиканский лицей для одарённых детей», почетный работник общего образования Российской Федерации, заслуженный учитель Республики Мордовия

К. М. Шитикова. учитель физики ГБОУ г. Москвы «Школа № 1547»

Научный редактор:

М. В. Семенов, канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры общей физики ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»

Рецензенты:

В. А. Макаров, доктор физико-математических наук

Б. А. Боронилов, заслуженный учитель Российской Федерации, почетный работник общего образования Российской Федерации

Ф50 **Физика (углубленный уровень). Реализация требований ФГОС среднего общего образования** : методическое пособие для учителя / [А. А. Якута и др.] ; Науч. редактор М. В. Семенов. – М.: ФГБНУ «Институт стратегии развития образования», 2023. – 114 с. : ил.

ISBN 978-5-6049296-1-2

В методическом пособии кратко рассмотрены дополнительные требования к предметным результатам освоения курса физики при изучении данного учебного предмета на углубленном уровне (в соответствии с обновленным ФГОС СОО), представлены элементы нового содержания обучения, не предусмотренные при изучении физики на базовом уровне, и даны методические рекомендации по изложению избранных тем учебной программы 10 класса.

Основная часть пособия представляет собой сборник статей, написанных опытными педагогами, преподающими физику на углубленном уровне в образовательных организациях, реализующих программы среднего общего и высшего образования. Материалы предназначены учителям физики и методистам по физике, но могут быть полезны и школьникам, интересующимся физикой.

Методическое пособие разработано в рамках государственного задания ФГБНУ «Институт стратегии развития образования» на 2023 г. «Обновление содержания общего образования».

УДК 372.853
ББК 74.262.23

ISBN 978-5-6049296-1-2

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Приказом Министерства просвещения Российской Федерации от 12 августа 2022 г. № 732 внесены изменения в Главу II федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования (далее – ФГОС СОО), утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 17 мая 2012 г. № 413 [1]. Изменения коснулись в том числе и требований к предметным результатам освоения программы по физике. Эти требования определяют базовый объем содержания среднего общего образования по учебному предмету «Физика», который может осваиваться на базовом и углубленном уровнях.

Согласно федеральной образовательной программе среднего общего образования (далее – ФОП СОО) [2], образовательная организация, осуществляющая образовательную деятельность по программам среднего общего образования, самостоятельно разрабатывает основную образовательную программу СОО (далее – ООП СОО) в соответствии с ФГОС СОО и ФОП СОО. Предметные результаты освоения физики в рамках ООП СОО, согласно ФГОС СОО, должны быть ориентированы:

при освоении физики на базовом уровне – на обеспечение преимущественно общеобразовательной и общекультурной подготовки;

при освоении физики на углубленном уровне – преимущественно на подготовку к последующему профессиональному образованию, развитие индивидуальных способностей обучающихся путем более глубокого, чем это предусматривается базовым курсом, освоения основ наук, систематических знаний и способов действий.

Предметные результаты освоения физики в рамках ООП СОО должны обеспечивать возможность дальнейшего успешного профессионального обучения и профессиональной деятельности.

Изучение физики на углубленном уровне рекомендуется для классов естественно-научного, технологического профилей. Углубленное изучение физики должно обеспечивать целенаправленную подготовку обучающихся к участию в проектной и исследовательской деятельности в указанных профильных областях, в олимпиадах по физике, к сдаче ЕГЭ по данному предмету с целью продолжения образования в высших учебных заведениях по математическим, физическим, естественно-научным, техническим, инженерно-физическим, инженерным специальностям, а также по ряду специальностей, связанных с современными информационными технологиями.

Согласно федеральной рабочей программе (физика, углубленный уровень) для 10–11 классов образовательных организаций (далее – ФРП СОО) рекомендуется отводить на изучение физики 340 часов за два года обучения: по 5 часов в неделю в 10 и 11 классах [3]. В каждом классе предусмотрен резерв учебного времени, отводимый на вариативную часть программы, содержание которой самостоятельно формируется участниками образовательных отношений. Кроме того, в 11 классе выделено 15 часов на систематизацию и обобщение предметного содержания и опыта деятельности, приобретенного при изучении курса физики 10–11 классов.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К ПРЕДМЕТНЫМ РЕЗУЛЬТАТАМ ОСВОЕНИЯ ФИЗИКИ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ПРЕДМЕТА НА УГЛУБЛЕННОМ УРОВНЕ

Согласно ФГОС СОО, в результате изучения в 10 классе физики на углубленном уровне должно быть обеспечено освоение обучающимися курса физики на базовом уровне, а также выполнение ряда дополнительных требований к предметным результатам освоения курса физики.

Эти дополнительные требования представлены в правом столбце таблицы 1. В левом столбце для удобства представлены требования к предметным результатам освоения курса физики на базовом уровне. В таблице отражены только требования, относящиеся к изучению физики в 10 классе.

Таблица 1

Требования к предметным результатам освоения курса физики (при изучении на базовом уровне)	*Дополнительные требования к предметным результатам освоения курса физики (при изучении на углубленном уровне)*
1. Сформированность представлений о роли и месте физики в современной научной картине мира, о системообразующей роли физики в развитии естественных наук, техники и современных технологий, о вкладе российских и зарубежных ученых-физиков в развитие науки; понимание физической сущности наблюдаемых явлений микромира, макромира и мегамира; понимание роли астрономии в практической деятельности человека и дальнейшем научно-техническом развитии, роли физики в формировании кругозора и функциональной грамотности	1. Сформированность понимания роли физики в экономической, технологической, социальной и этической сферах деятельности человека; роли и места физики в современной научной картине мира

Требования к предметным результатам освоения курса физики (при изучении на базовом уровне)	*Дополнительные требования к предметным результатам освоения курса физики (при изучении на углубленном уровне)*
человека для решения практических задач	
2. Сформированность умений распознавать физические явления (процессы) и объяснять их на основе изученных законов: равномерное и равноускоренное прямолинейное движение, свободное падение тел, движение по окружности, инерция, взаимодействие тел, диффузия, броуновское движение, строение жидкостей и твердых тел, изменение объема тел при нагревании (охлаждении), тепловое равновесие, испарение, конденсация, плавление, кристаллизация, кипение, влажность воздуха, связь средней кинетической энергии теплового движения молекул с абсолютной температурой, повышение давления газа при его нагревании в закрытом сосуде, связь между параметрами состояния газа в изопроцессах; электризация тел, взаимодействие зарядов, нагревание проводника с током	2. Сформированность системы знаний о физических закономерностях, законах, теориях, действующих на уровнях микромира, макромира и мегамира, представлений о всеобщем характере физических законов; представлений о структуре построения физической теории, что позволит осознать роль фундаментальных законов и принципов в современных представлениях о природе, понять границы применимости теорий, возможности их применения для описания естественнонаучных явлений и процессов
3. Владение основополагающими физическими понятиями и величинами, характеризующими физические процессы (связанными с механическим движением,	3. Сформированность умения различать условия применимости моделей физических тел и процессов (явлений): инерциальная система отсчета, материальная точка,

Требования к предметным результатам освоения курса физики (при изучении на базовом уровне)	*Дополнительные требования к предметным результатам освоения курса физики (при изучении на углубленном уровне)*
взаимодействием тел, атомно-молекулярным строением вещества, тепловыми процессами; электрическим полем, электрическим током)	равноускоренное движение, свободное падение, абсолютно упругая деформация, абсолютно упругое и абсолютно неупругое столкновения, моделей газа, жидкости и твердого (кристаллического) тела, идеального газа, точечный заряд, однородное электрическое поле
4. Владение закономерностями, законами и теориями (закон всемирного тяготения, I, II и III законы Ньютона, закон сохранения механической энергии, закон сохранения импульса, принцип суперпозиции сил, принцип равноправности инерциальных систем отсчета; молекулярно-кинетическая теория строения вещества, газовые законы, первый закон термодинамики; закон сохранения электрического заряда, закон Кулона, закон Ома для участка цепи, закон Ома для полной электрической цепи, закон Джоуля–Ленца, закон сохранения энергии)	4. Сформированность умения объяснять особенности протекания физических явлений: механическое движение, тепловое движение частиц вещества, тепловое равновесие, броуновское движение, диффузия, испарение, кипение и конденсация, плавление и кристаллизация, направленность теплопередачи, электризации тел, эквипотенциальности поверхности заряженного проводника
5. Умение учитывать границы применения изученных физических моделей: материальная точка, инерциальная система отсчета, идеальный газ; модели строения газов, жидкостей и твердых тел, точечный	5. Сформированность умений применять законы классической механики, молекулярной физики и термодинамики, электродинамики для анализа и объяснения явлений микромира, макромира и мегамира,

Требования к предметным результатам освоения курса физики (при изучении на базовом уровне)	*Дополнительные требования к предметным результатам освоения курса физики (при изучении на углубленном уровне)*
электрический заряд при решении физических задач	различать условия (границы, области) применимости физических законов, понимать всеобщий характер фундаментальных законов (закон сохранения механической энергии, закон сохранения импульса, закон всемирного тяготения, первый закон термодинамики, закон сохранения электрического заряда, закон сохранения энергии) и ограниченность использования частных законов; анализировать физические процессы, используя основные положения, законы и закономерности: относительность механического движения, формулы кинематики равноускоренного движения, преобразования Галилея для скорости и перемещения, три закона Ньютона, принцип относительности Галилея, закон всемирного тяготения, законы сохранения импульса и механической энергии, связь работы силы с изменением механической энергии, условия равновесия твердого тела; связь давления идеального газа со средней кинетической энергией теплового движения и концентрацией его молекул, связь температуры вещества со средней кинетической

Требования к предметным результатам освоения курса физики (при изучении на базовом уровне)	*Дополнительные требования к предметным результатам освоения курса физики (при изучении на углубленном уровне)*
	энергией его частиц, связь давления идеального газа с концентрацией молекул и его температурой, уравнение Менделеева–Клапейрона, первый закон термодинамики, закон сохранения энергии в тепловых процессах; закон сохранения электрического заряда, закон Кулона, потенциальность электростатического поля, принцип суперпозиции электрических полей, закона Кулона; законы Ома для участка цепи и для замкнутой электрической цепи, закон Джоуля–Ленца
6. <u>Владение основными методами научного познания, используемыми в физике</u>: проводить прямые и косвенные измерения физических величин, выбирая оптимальный способ измерения и используя известные методы оценки погрешностей измерений, проводить исследование зависимостей физических величин с использованием прямых измерений, объяснять полученные результаты, используя физические теории, законы и понятия, и делать выводы; соблюдать правила безопасного труда при проведении исследований в рамках учебного эксперимента	6. <u>Сформированность умений исследовать и анализировать разнообразные физические явления и свойства объектов</u>, проводить самостоятельные исследования в реальных и лабораторных условиях, читать и анализировать характеристики приборов и устройств, объяснять принципы их работы; владение умениями самостоятельно формулировать цель исследования (проекта), выдвигать гипотезы на основе знания основополагающих физических закономерностей и законов, проверять их экспериментальными средствами;

Требования к предметным результатам освоения курса физики (при изучении на базовом уровне)	*Дополнительные требования к предметным результатам освоения курса физики (при изучении на углубленном уровне)*
и учебно-исследовательской деятельности с использованием цифровых измерительных устройств и лабораторного оборудования	планировать и проводить физические эксперименты, описывать и анализировать полученную при выполнении эксперимента информацию, определять достоверность полученного результата
7. <u>Сформированность умения решать расчетные задачи с явно заданной физической моделью</u>, используя физические законы и принципы; на основе анализа условия задачи выбирать физическую модель, выделять физические величины и формулы, необходимые для ее решения, проводить расчеты и оценивать реальность полученного значения физической величины; решать качественные задачи, выстраивая логически непротиворечивую цепочку рассуждений с опорой на изученные законы, закономерности и физические явления	7. <u>Сформированность умения решать расчетные задачи с явно заданной и неявно заданной физической моделью</u>: на основании анализа условия выбирать физические модели, отвечающие требованиям задачи, применять формулы, законы, закономерности и постулаты физических теорий при использовании математических методов решения задач, проводить расчеты на основании имеющихся данных, анализировать результаты и корректировать методы решения с учетом полученных результатов; решать качественные задачи, требующие применения знаний из разных разделов школьного курса физики, а также интеграции знаний из других предметов естественнонаучного цикла: выстраивать логическую цепочку рассуждений с опорой на изученные законы, закономерности и физические явления

Требования к предметным результатам освоения курса физики (при изучении на базовом уровне)	*Дополнительные требования к предметным результатам освоения курса физики (при изучении на углубленном уровне)*
8. Сформированность умения применять полученные знания для объяснения условий протекания физических явлений в природе и для принятия практических решений в повседневной жизни для обеспечения безопасности при обращении с бытовыми приборами и техническими устройствами, сохранения здоровья и соблюдения норм экологического поведения в окружающей среде; понимание необходимости применения достижений физики и технологий для рационального природопользования	8. Сформированность умений анализировать и оценивать последствия бытовой и производственной деятельности человека, связанной с физическими процессами, с позиций экологической безопасности; представлений о рациональном природопользовании, а также разумном использовании достижений науки и технологий для дальнейшего развития человеческого общества
9. Сформированность собственной позиции по отношению к физической информации, получаемой из разных источников, умений использовать цифровые технологии для поиска, структурирования, интерпретации и представления учебной и научно-популярной информации; развитие умений критического анализа получаемой информации	9. Овладение различными способами работы с информацией физического содержания с использованием современных информационных технологий, развитие умений критического анализа и оценки достоверности получаемой информации
10. Овладение умениями работать в группе с выполнением различных социальных ролей, планировать работу группы, рационально распределять	10. Овладение организационными и познавательными умениями самостоятельного приобретения новых знаний в процессе выполнения

Требования к предметным результатам освоения курса физики (при изучении на базовом уровне)	*Дополнительные требования к предметным результатам освоения курса физики (при изучении на углубленном уровне)*
деятельность в нестандартных ситуациях, адекватно оценивать вклад каждого из участников группы в решение рассматриваемой проблемы	проектных и учебно-исследовательских работ, умениями работать в группе с выполнением различных социальных ролей, планировать работу группы, рационально распределять деятельность в нестандартных ситуациях, адекватно оценивать вклад каждого из участников группы в решение рассматриваемой проблемы
11. Овладение (сформированность представлений) правилами записи физических формул рельефно-точечной системы обозначений Л. Брайля (для слепых и слабовидящих обучающихся)	11. Сформированность мотивации к будущей профессиональной деятельности по специальностям физико-технического профиля

Анализ таблицы 1 показывает, что можно выделить следующие основные отличительные особенности процесса изучения физики на углубленном уровне (по сравнению с ее изучением на базовом уровне):

1) расширение предметного содержания учебного предмета;

2) качественно более высокий уровень освоения содержания учебного предмета, более широкий спектр умений и навыков (фразы, задающие акценты соответствующих отличительных особенностей, выделены в таблице 1 путем подчеркивания).

Обязательное предметное содержание учебного предмета «Физика» (в соответствии с ФГОС СОО) в структурированном виде представлено в настоящее время в ФРП СОО [3]. В ФРП СОО, кроме прочего, рекомендовано распределение учебных часов по тематическим разделам курса и рекомендуемая последовательность изучения тем и разделов учебного предмета. В ФРП СОО отражены планируемые результаты освоения курса физики на углубленном уровне на уровне среднего общего образования. ФРП СОО также включает: распределенные по годам обучения планируемые предметные результаты освоения курса физики, содержание учебного предмета «Физика», тематическое планирование с указанием количества часов, рекомендуемого для изучения каждой темы; дает характеристику учебной деятельности обучающихся, реализуемой при изучении этих тем.

Сравнение тематического планирования, представленного в ФРП СОО, с аналогичным тематическим планированием, представленным в федеральной рабочей программе среднего общего образования (физика, базовый уровень), позволяет выделить наиболее важные дополнения к основному содержанию образования по учебному предмету «Физика» на уровне среднего общего образования. Эти дополнения сведены в таблицу 2. В ней указаны названия тематических блоков (в соответствии с ФРП СОО), после которых в круглых скобках дано количество академических часов, дополнительно выделяемых на изучение данного блока при освоении физики на углубленном уровне (по сравнению с базовым уровнем).

Таблица 2

РАЗДЕЛ 2. МЕХАНИКА
Тематический блок «Кинематика» (5 ч)
Прямая и обратная задачи механики
Радиус-вектор материальной точки, его проекции на оси системы координат
Зависимость координат, скорости, ускорения и пути материальной точки от времени
Движение тела, брошенного под углом к горизонту
Касательное (тангенциальное) и полное ускорение материальной точки
Тематический блок «Динамика» (5 ч)
Неинерциальные системы отсчета (определение, примеры)
Эквивалентность гравитационной и инертной массы
Зависимость ускорения свободного падения от высоты над поверхностью планеты и от географической широты
Движение небесных тел и их спутников, законы Кеплера

Вес тела, движущегося с ускорением
Зависимость силы сопротивления в жидкости и газе от скорости относительного движения
Тематический блок «Статика твердого тела» (3 ч)
Сложение сил, приложенных к твердому телу
Центр тяжести тела
Устойчивое, неустойчивое, безразличное равновесие
Тематический блок «Законы сохранения в механике» (4 ч)
Центр масс системы материальных точек. Теорема о движении центра масс
Момент импульса материальной точки. Представление о сохранении момента импульса в центральных полях
Работа силы на малом и конечном перемещении. Графическое представление работы силы
Потенциальная энергия тела в однородном гравитационном поле
Потенциальная энергия в поле однородного шара (внутри и вне шара)
Вторая космическая скорость. Третья космическая скорость
Уравнение Бернулли для идеальной жидкости как следствие закона сохранения механической энергии
РАЗДЕЛ 3. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА
Тематический блок «Термодинамика. Тепловые машины» (10 ч)
Задание внешних условий для термодинамической системы. Внешние и внутренние параметры. Параметры термодинамической системы как средние значения величин, описывающих ее на микроскопическом уровне
Нулевое начало термодинамики. Самопроизвольная релаксация термодинамической системы к тепловому равновесию
Модель идеального газа в термодинамике – система уравнений: уравнение Менделеева–Клапейрона и выражение для внутренней энергии. Условие применимости этой модели: низкая концентрация частиц, высокие температуры
Квазистатические и нестатические процессы
Теплопередача как способ изменения внутренней энергии термодинамической системы без совершения работы
Теплоемкость тела. Молярная теплоемкость

Второй закон термодинамики для равновесных процессов: через заданное равновесное состояние термодинамической системы проходит единственная адиабата
Второй закон термодинамики для неравновесных процессов: невозможно передать теплоту от более холодного тела к более нагретому без компенсации (формулировка Р. Клаузиуса)
Тематический блок «Агрегатные состояния вещества. Фазовые переходы» (9 ч)
Насыщенные и ненасыщенные пары. Качественная зависимость плотности и давления насыщенного пара от температуры, их независимость от объема насыщенного пара
Деформация твердого тела. Растяжение и сжатие. Сдвиг. Модуль Юнга. Предел упругих деформаций. Тепловое расширение жидкостей и твердых тел, объемное и линейное
Ангармонизм тепловых колебаний частиц вещества как причина теплового расширения тел (на качественном уровне)
Поверхностное натяжение. Коэффициент поверхностного натяжения
Капиллярные явления. Давление под искривленной поверхностью жидкости
РАЗДЕЛ 4. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА
Тематический блок «Электрическое поле» (14 ч)
Пробный заряд. Линии напряженности электрического поля. Однородное электрическое поле
Потенциальность электростатического поля. Разность потенциалов и напряжение. Потенциальная энергия заряда в электростатическом поле
Связь напряженности поля для разности потенциалов для электростатического поля (как однородного, так и неоднородного)
Поле равномерно заряженной сферы. Поле равномерно заряженного по объему шара. Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости. Картины линий напряженности этих полей и эквипотенциальных поверхностей
Параллельное соединение конденсаторов. Последовательное соединение конденсаторов
Движение заряженной частицы в однородном электрическом поле
Тематический блок «Постоянный электрический ток» (12 ч)
Расчет разветвленных электрических цепей. Правила Кирхгофа
Конденсатор в цепи постоянного тока

Тематический блок «Токи в различных средах» (6 ч)
Электрическая проводимость различных веществ
Законы Фарадея для электролиза

С 1 сентября 2023 года образовательные организации начинают реализацию обновленного ФГОС СОО. Однако, существующее учебно-методическое обеспечение курса физики либо вовсе не содержит, либо содержит лишь часть фактического материала, необходимого учителю для преподавания дополнительных тем учебного предмета «Физика», представленных в таблице 2. Это может вызвать затруднения при формировании у обучающихся соответствующих знаний, умений, представлений в соответствии с требованиями обновленного ФГОС СОО.

Следует отметить, что наиболее существенным дополнением к основным видам деятельности обучающихся при изучении физики на углубленном уровне является решение расчетных задач с неявно заданной физической моделью. При этом ограниченный объем методического пособия не позволяет в полной мере и с необходимой степенью подробно осветить все вопросы и темы, которыми дополнен углубленный курс физики по сравнению с базовым.

В связи с указанными обстоятельствами было решено ограничиться рассмотрением в пособии ряда трудных тем, относящихся к разделам «Механика» и «Молекулярная физика и термодинамика». Материал раздела «Электродинамика» решено не затрагивать, поскольку он изучается в 10 классе лишь частично. В связи с этим рассмотрение тем данного раздела будет вынесено в отдельное методическое пособие, наряду с темами разделов «Колебания и волны», «Основы специальной теории относительности» и «Квантовая физика».

Материал пособия оформлен в виде подготовленных опытными учителями физики статей, в основу которых лег практический опыт преподавания авторами соответствующих тем в 10 классе общеобразовательной школы. В написании статей также приняли участие преподаватели высшей школы с большим опытом работы со школьниками, имеющими высокую мотивацию к изучению физики. Каждая статья, предваряемая краткими методическими указаниями, содержит теоретический материал по соответствующей теме, примеры задач с решениями, примеры домашних заданий, а также список литературы (преимущественно – в виде ссылок на электронные версии статей в журнале «Квант»), которая может быть полезна учителю для более полного раскрытия темы, а ученику – для более глубокого понимания изучаемого материала. Разумеется, сформулированные в данном методическом пособии рекомендации учителю следует воспринимать творчески, соотнося их с фактическими потребностями учебного процесса.

В пособие вошли следующие статьи:

«Вес тела, движущегося с ускорением», «Устойчивое, неустойчивое, безразличное равновесие», «Уравнение Бернулли для идеальной жидкости» (В. Т. Корнеев и Г. Д. Корнеева при участии А. А. Якуты);

«Определение кинематических величин с помощью графиков», «Движение тела, брошенного под углом к горизонту», «Потенциальная энергия в поле однородного массивного шара. Движение небесных тел и их спутников. Космические скорости. Законы Кеплера», «Центр масс-системы материальных точек. Теорема о движении центра масс», «Момент импульса материальной точки. Сохранение момента импульса в центральных полях» (Д. В. Подлесный при участии Е. Д. Кочергиной);

«Теплоемкость тела. Молярная теплоемкость» (Т. В. Саушкина при участии А. А. Якуты);

«Второй закон термодинамики», «Насыщенные и ненасыщенные пары́», «Поверхностное натяжение», «Давление под искривленной поверхностью жидкости. Капиллярные явления» (К. М. Шитикова при участии А. А. Якуты).

Нумерация формул и рисунков в пособии является сквозной. Ссылки везде даны на список литературы, приведенный в конце пособия.

При освоении учебного предмета «Физика» на углубленном уровне большое внимание необходимо уделять решению задач различного уровня сложности. Множество таких задач можно найти в сборниках [10–12] (высокий и повышенный уровни сложности) и [13–26] (олимпиадный уровень сложности). Многие задачи в указанных сборниках снабжены решениями или указаниями к ним, что дает возможность рекомендовать данные пособия для самостоятельной работы обучающихся.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИЗУЧЕНИЮ ИЗБРАННЫХ ТЕМ РАЗДЕЛА «МЕХАНИКА»

Кинематика

Определение кинематических величин с помощью графиков

Задачи, при решении которых требуется определить различные физические величины с использованием графиков, часто встречаются в вариантах ЕГЭ и олимпиадных заданиях. Ниже речь пойдет о графическом представлении кинематических характеристик механического движения, таких как путь, скорость и ускорение.

В РП СОО рассматриваемые вопросы входят в тематический блок «Кинематика», на изучение которого отводится 10 ч. Рекомендуем учителю посвятить данной теме минимум 1 ч.

Работая с графиком, надо уметь не только считывать с него значения физических величин в нужных точках, но и в случае необходимости проводить касательные к графику в этих точках. Угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции в некоторой его точке, численно равен производной функции в этой точке. Это позволяет, например, находить скорость, имея график зависимости пройденного пути от времени, так как скорость (а точнее, модуль вектора скорости) есть не что иное, как производная пути по времени. При определении пути, пройденного телом, мы прибегаем к нахождению площади под графиком зависимости скорости от времени, проводя тем самым процедуру интегрирования графическим методом[1].

Рекомендуем на уроке разобрать примеры № 1–4. На наш взгляд, примеры № 5–7 имеют повышенную сложность. Их стоит рекомендовать обучающимся, проходящим дополнительную подготовку к олимпиадам школьников по физике, в качестве домашнего задания с последующим разбором решений в рамках внеурочной деятельности.

Следует отметить, что навыки, приобретенные при работе с графиками зависимостей кинематических величин, несомненно, пригодятся при изучении последующих разделов курса физики. Работая с графиками, как уже отмечалось,

[1] Если на графике изображена зависимость координаты от времени $x(t)$, то угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции в некоторой его точке, численно равен проекции скорости $v_x(t)$ в соответствующий момент времени. Аналогично площадь под графиком зависимости $v_x(t)$ численно равна изменению координаты x.

мы можем проводить процедуры графического дифференцирования и интегрирования. Понимание сущности и физического смысла соответствующих математических операций, а также владение указанными навыками важно в связи с тем, что многие физические величины вводятся в рассмотрение, как производные или интегралы других функций.

Пример 1. На рисунке 1 представлен график зависимости модуля v скорости тела от времени t. Найдите путь, пройденный этим телом за первые $T = 150$ с от начала его движения, и среднюю скорость к моменту времени .

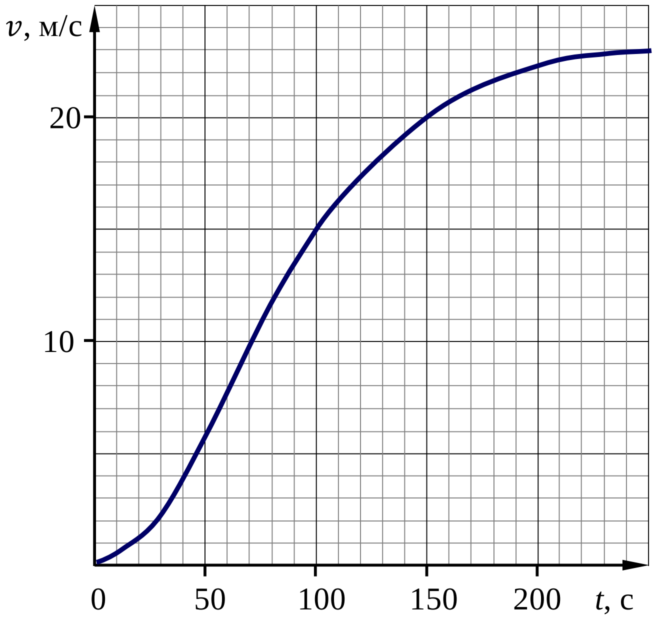


Рис. 1

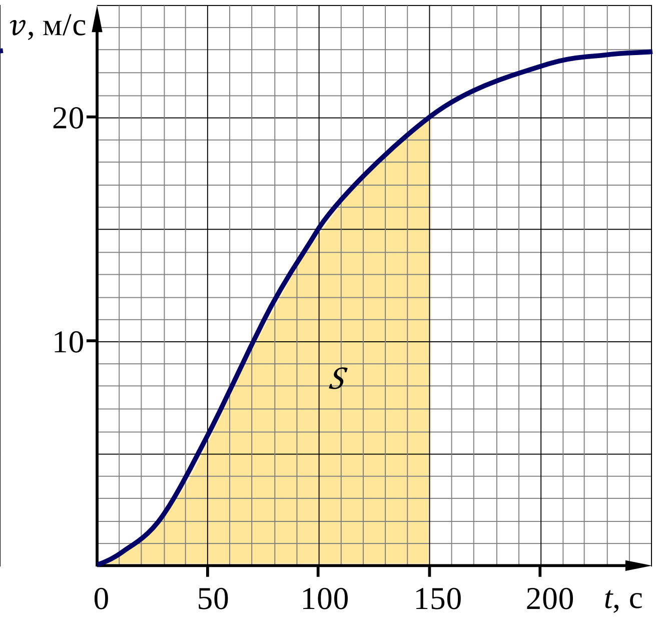


Рис. 2

Решение. Путь, пройденный телом к моменту времени T, пропорционален площади под графиком зависимости $v(t)$ в интервале времени $0 \le t \le T$ (площади закрашенной области на рис. 2). Обращаем внимание, что именно пропорционален, а не равен! Причем коэффициент этой пропорциональности – размерная физическая величина, позволяющая вычисленную буквально (геометрически) площадь под графиком перевести в необходимые единицы – единицы измерения пути, т. е. в метры.

На основании этого вычислим путь по формуле: $S \approx (N_1 + \frac{1}{2}N_2) \cdot S_1$, где $N_1 = 141$ – число целых, а $N_2 = 20$ – число нецелых клеточек в закрашенной области; $S_1 = 10$ м – путь, соответствующий площади одной целой клеточки. Таким образом, вычисляем путь и находим среднюю скорость:

$$S \approx 1510 \text{ м}; \qquad v_{\text{ср}} = \frac{S}{T} = \frac{1510 \text{ м}}{150 \text{ с}} \approx 10 \text{ м/с}.$$

Пример 2. На рисунке 3 представлен график зависимости пути S, пройденного телом, от времени t. Найдите мгновенную и среднюю скорости движения в момент времени $T = 15$ с.

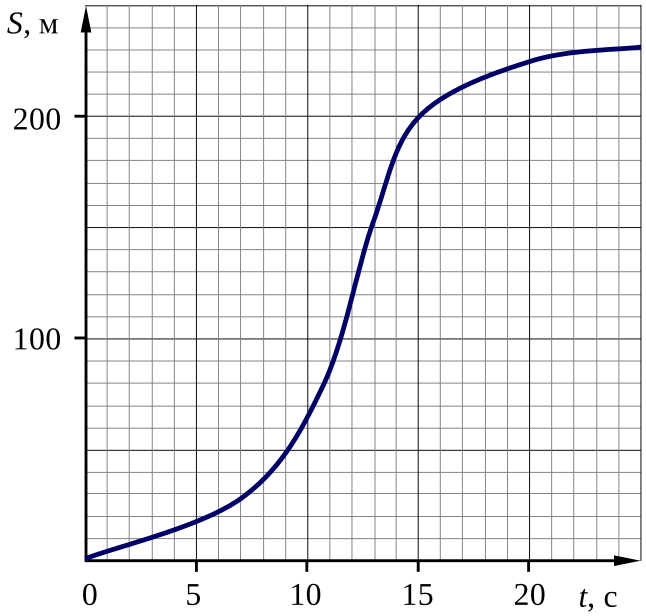


Рис. 3

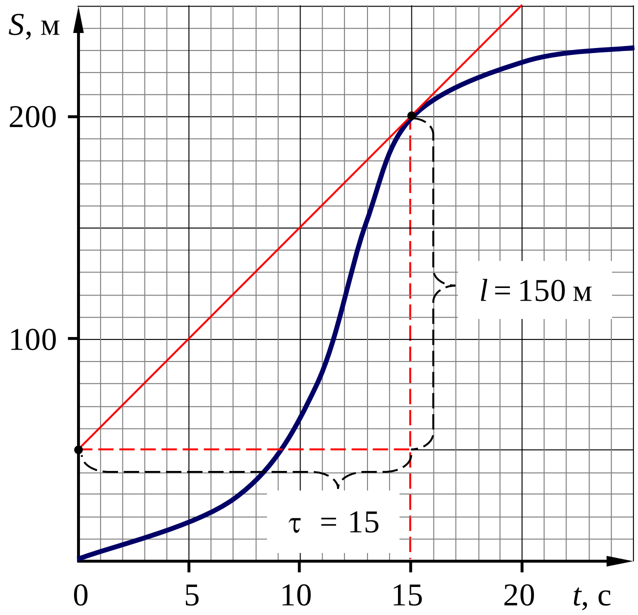


Рис. 4

Решение. Мгновенная скорость v в любой момент времени равна производной пути по времени и, следовательно, равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику зависимости $S(t)$ в этот момент времени. Проведем касательную к графику в точке, соответствующей моменту времени $T = 15$ с, и определим необходимые величины, обозначенные буквами l и τ (рис. 4). С их помощью вычислим искомую мгновенную скорость:

$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{l}{\tau} = \frac{150\text{ м}}{15\text{ с}} = 10\text{ м/с}.$$

Для средней скорости имеем:

$$v_{\text{ср}} = \frac{S(T)}{T} = \frac{200\text{ м}}{15\text{ с}} \approx 13{,}3\text{ м/с}.$$

Пример 3. Тело движется прямолинейно. На рисунке 5 представлен график зависимости модуля v скорости тела от времени t. Найдите ускорение тела в момент времени $T = 150$ с.

Решение. Ускорение a в любой момент времени равно производной скорости по времени и, следовательно, равно угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику зависимости $v(t)$ в этот момент времени. Проведем касательную к графику в точке, соответствующей моменту времени $T = 150$ с, и определим необходимые величины, обозначенные буквами u и τ (см. рис. 5). С их помощью вычислим искомое ускорение:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{u}{\tau} = \frac{10\ \text{м/с}}{150\ \text{с}} \approx 6{,}7\ \text{см/с}^2.$$

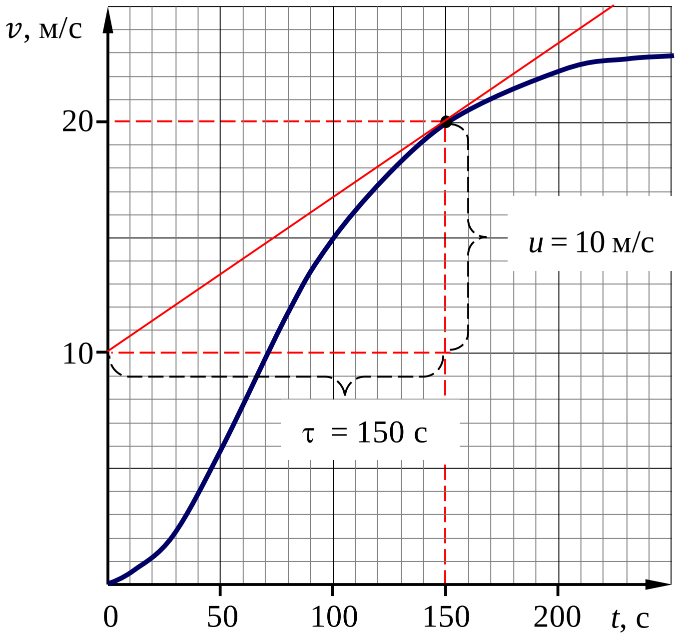


Рис. 5

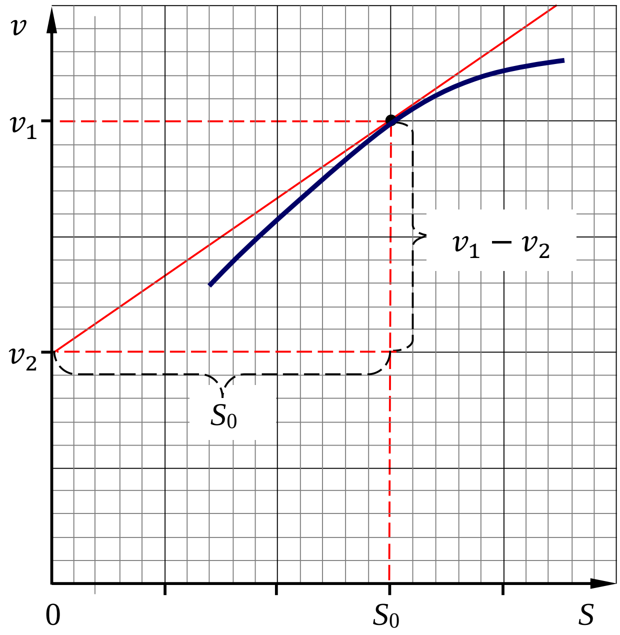


Рис. 6

Пример 4. Автомобиль движется по ровной прямой дороге. На рисунке 6 представлен фрагмент графика зависимости модуля v скорости движения автомобиля от пройденного им пути S. В некоторый момент времени, когда пройденный путь равняется S_0, значение скорости составляет v_1, а касательная, проведенная к графику в соответствующей точке, пересекает ось v в точке с ординатой v_2. Найдите ускорение автомобиля в указанный момент времени. Величины v_1, v_2 и S_0 считать известными.

Решение. Перейдем в выражении для модуля ускорения от дифференцирования по времени к дифференцированию по пройденному пути:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dS} \cdot \frac{dS}{dt} = \frac{dv}{dS} \cdot v.$$

(Здесь полезно обратить внимание обучающихся на тот факт, что с бесконечно малыми приращениями скорости, времени и пути можно обращаться как с алгебраическими величинами, т. е. на них можно делить и умножать, а получающиеся при этом отношения двух бесконечно малых величин представляют собой соответствующие производные.)

Входящая в последнее выражение производная $\frac{dv}{dS}$ равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику зависимости $v(S)$ в заданной точке S_0. Она находится геометрически из рисунка 6:

$$\frac{dv}{dS} = \frac{v_1 - v_2}{S_0}.$$

С учетом этого окончательно имеем:

$$a = \frac{dv}{dS} \cdot v(S_0) = \frac{(v_1 - v_2)v_1}{S_0}.$$

Пример 5. На рисунке 7 представлен фрагмент графика зависимости средней скорости движения автомобиля $v_{\text{ср}}$ от времени t. В некоторый момент времени t_0 значение средней скорости составляет v_1 = 20 м/с, а касательная, проведенная к графику в соответствующей точке, пересекает ось $v_{\text{ср}}$ в точке с ординатой v_2 = 10 м/с. Найдите мгновенную скорость движения автомобиля в момент времени t_0.

Решение. Искомая скорость равна производной пути по времени: $v = \frac{dS}{dt}$. Принимая во внимание, что $S = v_{\text{ср}} \cdot t$ и, следовательно, $dS = dv_{\text{ср}} \cdot t + v_{\text{ср}} \cdot dt$, с учетом рисунка 7, окончательно имеем:

$$v = \frac{dv_{\text{ср}}}{dt} \cdot t + v_{\text{ср}} = \frac{v_1 - v_2}{t_0} \cdot t_0 + v_1 = 2v_1 - v_2 = 30 \text{ м/с}.$$

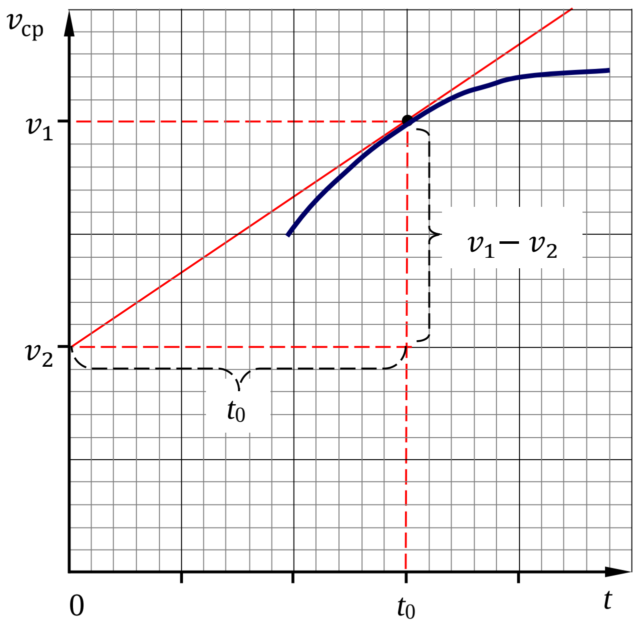


Рис. 7

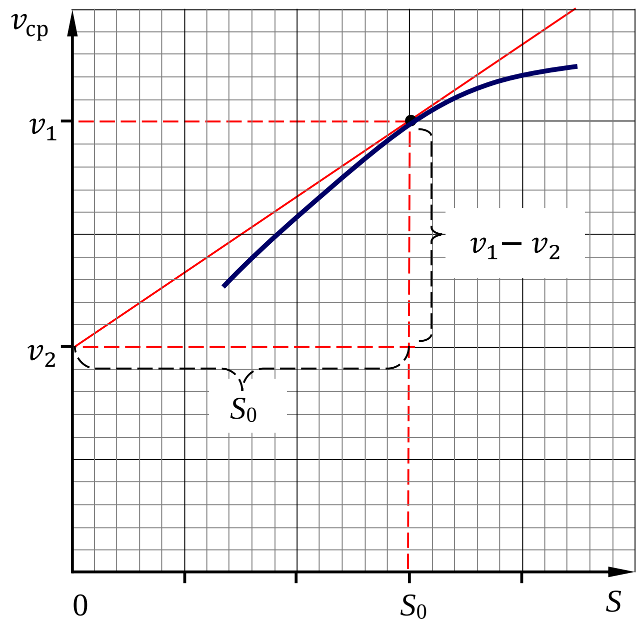


Рис. 8

Пример 6. На рисунке 8 представлен фрагмент графика зависимости средней скорости движения автомобиля $v_{\text{ср}}$ от пройденного им пути S. В некоторый момент времени, когда пройденный путь равняется S_0, значение средней скорости составляет $v_1 = 20$ м/с, а касательная, проведенная к графику в соответствующей точке, пересекает ось $v_{\text{ср}}$ в точке с ординатой $v_2 = 10$ м/с. Найдите мгновенную скорость движения автомобиля в указанный момент времени.

Решение. В выражении для мгновенной скорости v, полученном в предыдущем примере, перейдем от дифференцирования по времени к дифференцированию по пройденному пути:

$$v = \frac{dv_{\text{ср}}}{dt} \cdot t + v_{\text{ср}} = \frac{dv_{\text{ср}}}{dS} \cdot \frac{dS}{dt} \cdot t + v_{\text{ср}} = \frac{dv_{\text{ср}}}{dS} \cdot v \cdot \frac{S}{v_{\text{ср}}} + v_{\text{ср}}.$$

Выражая отсюда искомую скорость и находя производную $\frac{dv_{\text{ср}}}{dS}$ из графика, окончательно имеем:

$$v = \frac{v_{\text{ср}}}{1 - \frac{dv_{\text{ср}}}{dS} \cdot \frac{S}{v_{\text{ср}}}} = \frac{v_1}{1 - \frac{v_1 - v_2}{S_0} \cdot \frac{S_0}{v_1}} = \frac{v_1^2}{v_2} = 40 \text{ м/с}.$$

В заключение рассмотрим еще один пример, составленный автором по мотивам известной задачи.

Пример 7. Муравей стартует с начальной скоростью $v_0 = 2$ см/с и движется по некоторой траектории. За какое время τ муравей пройдет первый метр своего пути ($S = 1$ м), если в процессе движения модуль его скорости v зависит от пройденного пути x по закону: $v(x) = \frac{v_0}{1+kx}$, где $k = 1$ м$^{-1}$?

Решение. Конечно же хорошо знающий математику старшеклассник, на основании определения скорости ($v = \frac{dx}{dt}$) и условия задачи, составит несложное дифференциальное уравнение: $v = \frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{1+kx}$, разделит в нем переменные: $(1 + kx)dx = V_0 dt$, проинтегрирует и найдет искомое время t:

$$\int_0^S (1 + kx)dx = \int_0^\tau v_0 dt \;\rightarrow\; S + \frac{kS^2}{2} = v_0\tau;$$

$$\tau = \frac{S}{v_0}\left(1 + \frac{kS}{2}\right) = 75 \text{ с}.$$

Но как же обучающимся решить поставленную задачу в том случае, если они не знакомы на достаточно высоком уровне с дифференцированием и интегрированием? И тут на помощь приходит график зависимости величины обратной скорости $\frac{1}{v}$ от пройденного пути x! Дело в том, что площадь под этим графиком пропорциональна(!) времени t, затраченному на прохождение соответствующего участка траектории (рис. 9). Полезно предложить обучающимся самостоятельно разобраться, почему это так.

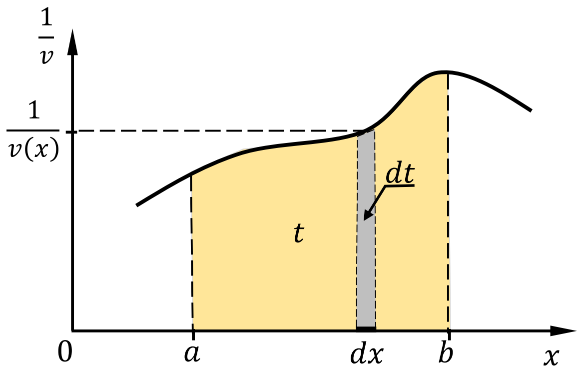


Рис. 9

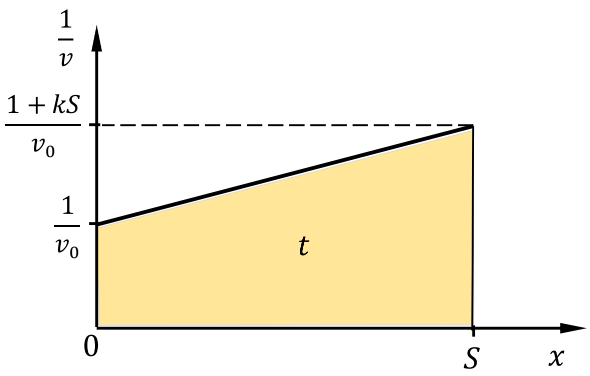


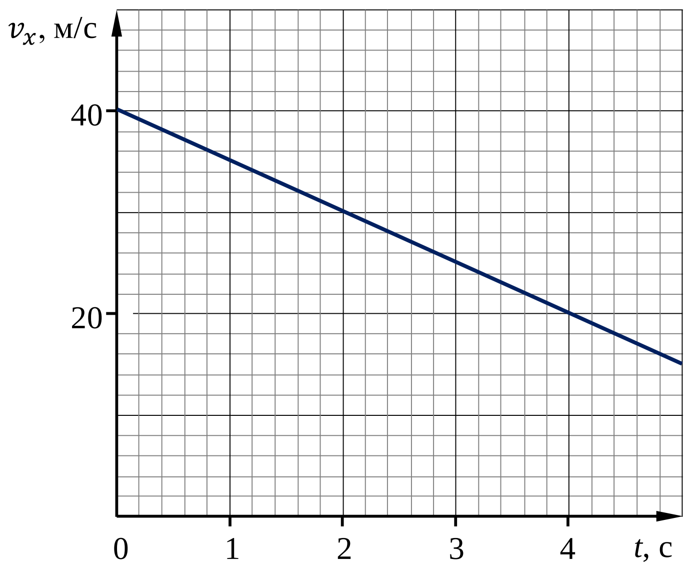
Рис. 10

В условиях нашего примера о движении муравья соответствующий график представлен на рисунке 10. Искомое время движения муравья будет пропорционально площади трапеции, закрашенной на рисунке. Оно равно

$$t = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{v_0} + \frac{1+kS}{v_0}\right) \cdot S = \frac{S}{v_0}\left(1 + \frac{kS}{2}\right) == 75 \text{ с.}$$

Домашнее задание

Задача 1. На рисунке показана зависимость $v_x(t)$ – проекции скорости v_x материальной точки на ось OX от времени t при равноускоренном движении. Найдите проекцию a_x ускорения на эту ось, а также изменение координаты x точки за вторую секунду движения. (Ответ: $a_x = -5{,}0$ м/с^2; $\Delta x = 32{,}5$ м.)



Задача 2. Муравей Гоша торопился успеть в родной муравейник до заката солнца. Он двигался так, что модуль его ускорения a был обратно пропорционален модулю его скорости v в каждый момент времени: $a = k/v$, где k – известная постоянная величина. За какое время t Гоша увеличит свою скорость от v_1 до v_2? (Ответ: $t = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2k}$.)

Литература

1. *Зайчиков Ю. В.* Графики движения // Квант. – 1970. – № 6. – С. 39–45, 61–63. – URL: http://kvant.mccme.ru/1970/06/grafiki_dvizheniya.htm.

2. *Белкин И. К.* О графике прямолинейного равноускоренного движения // Квант. – 1983. – № 10. – С. 33–35. – URL: http://kvant.mccme.ru/1983/10/o_grafike_pryamolinejnogo_ravn.htm.

Движение тела, брошенного под углом к горизонту

Вопросы, связанные с движением тела, брошенного под углом к горизонту, входят в тематический блок «Кинематика» раздела «Механика», на изучение которого отводится 10 ч. Считаем целесообразным данным вопросам уделить не менее 3 ч, дополняя теоретическое изложение разбором примеров решения задач. Задачи на движение тела, брошенного под углом к горизонту, часто встречаются на ЕГЭ по физике, а также на физических олимпиадах разного уровня. Они составляют бóльшую часть задач, требующих рассмотрения равноускоренного движения.

Изложение материала следует начать с напоминания о таких понятиях, как «радиус-вектор» и «закон движения» материальной точки. Затем нужно уделить внимание записи в векторном виде законов равноускоренного движения (зависимостям радиуса-вектора и скорости точки от времени), а также записи этих же законов в координатной форме (зависимостям координат и проекций скоростей точки от времени). После этого можно перейти собственно к рассмотрению движения тела, брошенного под углом к горизонту.

В выбранной системе отсчета положение тела M (материальной точки) в некоторый момент времени t можно задать радиусом-вектором $\vec{r}(t)$ – вектором, проведенным из начала координат O в ту точку пространства, в которой находится наше тело в рассматриваемый момент времени (см. рис. 11, на котором показана ситуация, когда тело движется в некоторой плоскости XOY).

Проекции радиуса-вектора $\vec{r}(t)$ на координатные оси OX и OY есть не что иное, как соответствующие координаты $x(t)$ и $y(t)$ нашего тела (материальной точки M). Таким образом, зная радиус-вектор точки, можно найти ее координаты и, наоборот, по известным координатам можно построить радиус-вектор. Поэтому оба способа описания движения – векторный и координатный – являются равносильными.

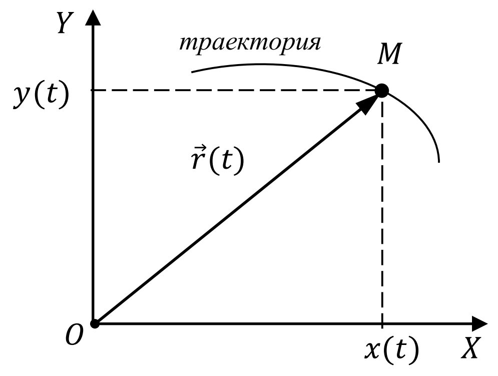


Рис. 11

Законом движения точки называют зависимость ее радиуса-вектора от времени: $\vec{r} = \vec{r}(t)$ или эквивалентную ей систему трех скалярных выражений, которые описывают зависимости координат точки от времени. При движении в некоторой плоскости это будут два уравнения:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

Для описания прямолинейного движения достаточно одной координаты, а в общем случае пространственного движения придется вводить третью координату z и, соответственно, записывать третье уравнение: $z = z(t)$.

Напомним также, что кинематическими характеристиками механического движения точки являются ее скорость $\vec{v}$ и ускорение $\vec{a}$.

Согласно определению, скоростью $\vec{v}$ точки называют производную ее радиуса-вектора $\vec{r}(t)$ по времени:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}},$$

где $d\vec{r}$ – бесконечно малое перемещение, совершенное точкой за бесконечно малый промежуток времени dt, а $\dot{\vec{r}}$ – принятое в физике обозначение производной по времени.

Аналогично вводится и ускорение $\vec{a}$ как производная скорости $\vec{v}(t)$ по времени или вторая производная $\ddot{\vec{r}}$ радиуса-вектора $\vec{r}(t)$:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}},$$

где $d\vec{v}$ – бесконечно малое изменение скорости точки, произошедшее за промежуток времени dt.

Переходя к равноускоренному движению, т. е. к движению с постоянным ускорением, отметим, что если векторы начальной скорости $\vec{v}_0$ и ускорения $\vec{a}$ коллинеарные (параллельны друг другу), то траектория движения тела будет прямой линией. В общем случае траекторией будет плоская кривая – парабола. При этом движение произойдет в плоскости, задаваемой векторами $\vec{v}_0$ и $\vec{a}$.

Выражения, определяющие радиус-вектор $\vec{r}$ точки и ее скорость $\vec{v}$ при равноускоренном движении, в случае его векторного описания имеют вид:

$$\begin{gathered} \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}, \\ \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t. \end{gathered} \tag{1}$$

Соотношения (1) могут быть получены из определений скорости и ускорения путем интегрирования с учетом постоянства $\vec{v}_0$ и $\vec{a}$. В самом деле, используя определение ускорения, имеем:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} \quad \rightarrow \quad d\vec{v} = \vec{a}\cdot dt \quad \rightarrow \quad \int\limits_{\vec{v}_0}^{\vec{v}(t)} d\vec{v} = \vec{a}\cdot\int\limits_0^t dt \quad \rightarrow \quad \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t.$$

Аналогично находим и зависимость радиуса-вектора $\vec{r}$ от времени при равноускоренном движении:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t\,, \rightarrow \; d\vec{r} = (\vec{v}_0 + \vec{a}t)\cdot dt \quad \rightarrow \int\limits_{\vec{r}_0}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int\limits_0^t (\vec{v}_0 + \vec{a}t)\cdot dt \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}\,.$$

Здесь $\vec{r}_0$ – радиус-вектор точки в начальный момент времени $t = 0$.

В соответствии с (1) уравнения, описывающие зависимости от времени координат и проекций скоростей равноускорено движущейся точки, имеют вид:

$$\begin{gathered} x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}, \\ y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}; \\ v_x(t) = v_{0x} + a_x t, \\ v_y(t) = v_{0y} + a_y t. \end{gathered} \qquad (2)$$

Здесь x_0 и y_0 – координаты точки в начальный момент времени $t = 0$.

Примером равноускоренного движения может служить движение тела, брошенного под углом к горизонту, конечно же, если пренебречь силой сопротивления воздуха, а также считать силу тяжести, действующую на тело, постоянной как по модулю, так и по направлению. Последнее допущение правомерно, если начальная скорость тела намного меньше первой космической скорости, которая для Земли примерно равна 8 км/с. В этом случае движение тела можно считать равноускоренным и происходящим с ускорением, равным ускорению свободного падения $\vec{g}$ вблизи поверхности Земли.

При рассмотрении следующих примеров будем считать движущиеся тела материальными точками, сопротивлением воздуха будем пренебрегать, ускорение свободного падения g будем считать постоянным и известным.

Пример 1. Камень бросили с горизонтального участка поверхности земли с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту (рис. 12). Найдите время τ полета камня до момента падения на землю, дальность l полета камня, максимальную высоту h его подъема, а также модуль v его скорости непосредственно перед падением на землю.

Решение. Введем систему координат XOY, как показано на рисунке 12.

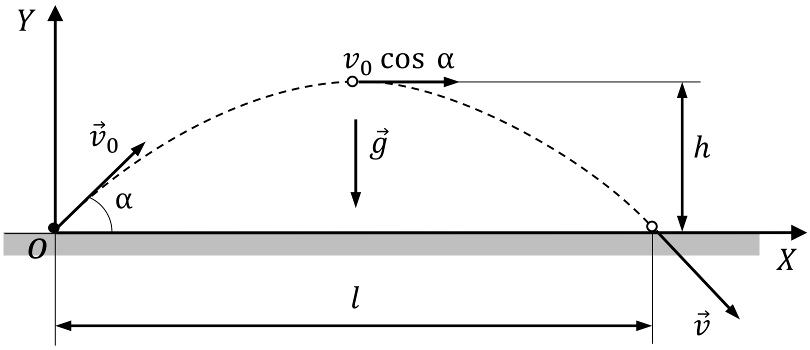


Рис. 12

Тогда:

$$x_0 = y_0 = 0,$$
$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha, \quad v_{0y} = v_0 \sin \alpha,$$
$$a_x = 0, \quad a_y = -g.$$

С учетом этого уравнения (2) примут вид:

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t, \\ y(t) = v_0 \sin \alpha \cdot t - \dfrac{gt^2}{2}; \\ v_x(t) = v_0 \cos \alpha, \\ v_y(t) = v_0 \sin \alpha - gt. \end{cases} \tag{3}$$

Если τ — время полета камня, то в момент времени $t = \tau$ координата y камня становится равной нулю, а координата x принимает значение, равное искомой дальности полета l.

С учетом этого приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} y(\tau) = v_0 \sin \alpha \cdot \tau - \dfrac{g\tau^2}{2} = 0, \\ x(\tau) = l = v_0 \cos \alpha \cdot \tau. \end{cases}$$

Отсюда находим время полета τ:

$$\tau = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

и искомую дальность полета l:

$$l = v_0 \cos \alpha \cdot \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Заметим, что при заданной начальной скорости v_0 максимальная дальность полета достигается при угле $\alpha = 45°$ (при таком значении угла α величина $\sin 2\alpha$

принимает максимально возможное значение, равное единице). Здесь следует обратить внимание на то, что речь идет о бросании камня с поверхности Земли. При бросании камня с некоторой высоты, например с башни (см. **пример 2**), максимальная дальность полета будет достигаться уже при угле $\alpha < 45°$!

Зная время τ, на основании двух последних уравнений системы (3) нетрудно найти проекции скорости v_x и v_y тела непосредственно перед его падением на землю, и рассчитать на основании теоремы Пифагора искомый модуль скорости v:

$$v_x(\tau) = v_0 \cos\,\alpha,$$

$$v_y(\tau) = v_0 \sin\,\alpha - g\tau = v_0 \sin\,\alpha - g \cdot \frac{2v_0 \sin\,\alpha}{g} = -v_0 \sin\,\alpha\,;$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(v_0 \cos\,\alpha\right)^2 + \left(-v_0 \sin\,\alpha\right)^2} = \sqrt{v_0^2\left(\sin^2\,\alpha + \cos^2\,\alpha\right)} = v_0.$$

Мы получили, что модуль скорости при падении камня в точности равен модулю его начальной скорости при бросании. К этому результату легче прийти через закон сохранения механической энергии – тогда он будет просто очевиден. Однако на начальном этапе изучения данной темы полезно поупражняться и с кинематическими формулами.

Перейдем теперь к нахождению максимальной высоты подъема h. Обозначим через τ_1 время движения до наивысшей точки. Тогда в момент времени $t = \tau_1$ камень летит горизонтально и, следовательно, $v_y(\tau_1) = 0$. Таким образом, приходим к уравнению:

$$v_0 \sin\,\alpha - g\tau_1 = 0$$

и находим время τ_1:

$$\tau_1 = \frac{v_0 \sin\,\alpha}{g} = \frac{\tau}{2}.$$

Принимая во внимание, что $y(\tau_1) = h$, находим искомую высоту:

$$h = v_0 \sin\,\alpha \cdot \tau_1 - \frac{g\tau_1^2}{2} = \frac{v_0^2 \sin^2\,\alpha}{2g}.$$

В завершение рассмотрения примера выпишем полученные формулы, которые часто используются для решения задач:

$$\tau = \frac{2v_0 \sin\,\alpha}{g}; \quad l = \frac{v_0^2 \sin\,2\alpha}{g}; \quad h = \frac{v_0^2 \sin^2\,\alpha}{2g}.$$

Пример 2. Камень бросают с башни высотой h_0 с начальной скоростью v_0. Найдите время τ полета камня до момента падения на горизонтальную поверхность земли. Под каким углом α к горизонту надо бросить камень, чтобы дальность его полета была максимальной? Чему равна эта максимальная дальность полета камня?

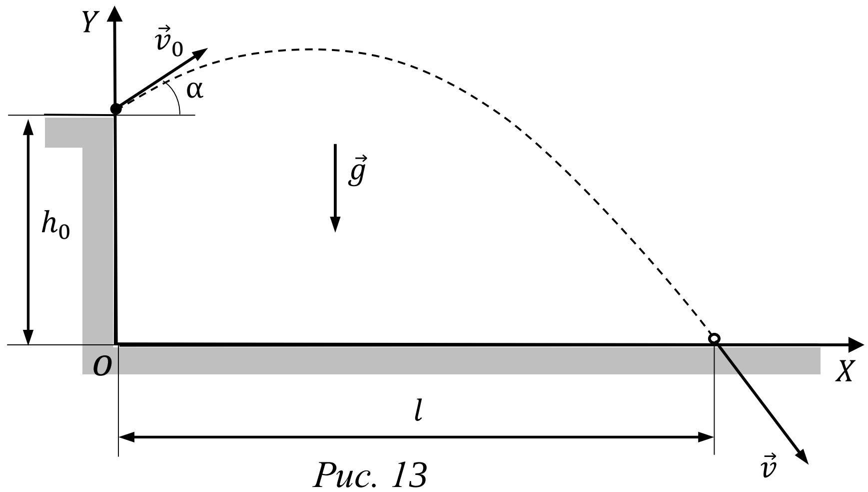


Рис. 13

Решение. Введем систему координат XOY, как показано на рисунке 13. Тогда

$$x_0 = 0,\ \ y_0 = h_0,$$

$$v_{0x} = v_0 \cos\ \alpha,\ \ v_{0y} = v_0 \sin\ \alpha,$$

$$a_x = 0,\ \ a_y = -g.$$

С учетом этого уравнения (2) примут вид:

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\ \alpha \cdot t, \\ y(t) = h_0 + v_0 \sin\ \alpha \cdot t - \dfrac{gt^2}{2}; \\ v_x(t) = v_0 \cos\ \alpha\,, \\ v_y(t) = v_0 \sin\ \alpha - gt. \end{cases} \tag{4}$$

Если τ – время полета камня, то в момент времени $t = \tau$ координата y камня становится равной нулю, а координата x принимает значение, равное дальности полета l.

Таким образом, приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} h_0 + v_0 \sin\ \alpha \cdot \tau - \dfrac{g\tau^2}{2} = 0, \\ l = v_0 \cos\ \alpha \cdot \tau. \end{cases} \tag{5}$$

Решая полученное квадратное уравнение, находим время полета τ:

$$\tau = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 + \frac{2h_0}{g}}\,.$$

Второй корень квадратного уравнения мы отбросили, поскольку он дает отрицательное время полета. (Полезно подумать, можно ли придать этому отброшенному корню физический смысл.)

Для дальности полета l имеем:

$$l = v_0 \cos\,\alpha \cdot \tau \ = v_0 \cos\,\alpha \cdot \left(\frac{v_0 \sin\,\alpha}{g} \ + \sqrt{\left(\frac{v_0 \sin\,\alpha}{g}\right)^2 + \frac{2h_0}{g}} \right). \qquad (6)$$

Анализ полученного выражения на наличие максимума методами математического анализа достаточно сложен и, главное, не интересен, так как превращает задачу в скучное упражнение по математике. Поэтому поступим иначе.

Предположим, что нам надо бросить камень на расстояние l. Спрашивается: под каким углом α его надо бросать, если начальная скорость равна v_0? Тогда, исключая из системы уравнений (5) время τ, можно прийти к квадратному уравнению относительно $\mathrm{tg}\,\alpha$ (полезно предложить обучающимся самостоятельно провести соответствующие преобразования):

$$\mathrm{tg}^2\,\alpha - \frac{2v_0^2}{gl} \cdot \mathrm{tg}\,\alpha - \frac{2v_0^2 h_0}{gl^2} + 1 = 0. \qquad (7)$$

Данное уравнение будет иметь действительное решение при условии, что его дискриминант неотрицателен. Таким образом, приходим к неравенству:

$$\frac{v_0^4}{g^2 l^2} + \frac{2v_0^2 h_0}{gl^2} - 1 \geq 0,$$

из которого получаем неравенство для дальности полета l:

$$l \leq \frac{v_0 \cdot \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}}{g}.$$

Полученный результат имеет простой физический смысл, так как очевидно, что при заданной начальной скорости камень нельзя бросить сколь угодно далеко. Таким образом, максимально возможная дальность полета камня, как это следует из последнего неравенства, определяется выражением:

$$l_{\max} = \frac{v_0 \cdot \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}}{g}.$$

Из уравнения (7) теперь нетрудно найти тангенс искомого угла α. Поскольку дискриминант этого уравнения равен нулю (из этого условия мы искали $l_{\max}$), то:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh_0}} \quad \to \quad \alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh_0}}\right).$$

Для получения данного результата мы обошлись без дифференцирования. Тем не менее нам пришлось провести значительные вычисления. Оказывается, что тот же результат можно гораздо проще получить другим способом, в основу которого положен так называемый «геометрический метод» рассмотрения движения тела, брошенного под углом к горизонту.

Как уже отмечалось, дальность полета камня может быть выражена через начальную скорость v_0, угол бросания α и время полета τ по формуле:

$$l = v_0 \cos\,\alpha \cdot \tau.$$

Кроме этого заметим, что конечная скорость камня v не зависит от угла бросания α и определяется выражением:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}.$$

Последний результат можно получить, применяя закон сохранения механической энергии, либо с помощью формул кинематики.

В соответствии с (1) для вектора конечной скорости $\vec{v}$ имеем:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}\tau.$$

Воспользуемся правилом треугольника для сложения векторов $\vec{v}$, $\vec{v}_0$ и $\vec{g}\tau$ (рис. 14). На этом рисунке через β обозначен угол, образуемый вектором конечной скорости камня $\vec{v}$ с вектором его начальной скорости $\vec{v}_0$.

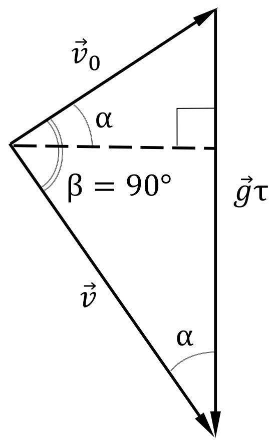


Рис. 14

Выразим теперь площадь этого треугольника (назовем его «треугольником скоростей») двумя способами. С одной стороны, площадь равна половине произведения длины основания на величину опущенной на него высоты, а с другой стороны – половине произведения длин двух сторон на синус угла между ними. В результате мы приходим к уравнению:

$$\frac{1}{2} \cdot g\tau \cdot v_0 \cos\,\alpha = \frac{1}{2} \cdot v_0 \cdot v \cdot \sin\,\beta,$$

из которого можно выразить дальность полета $l = v_0 \cos\,\alpha \cdot \tau$ через величины v_0, v и β:

$$l = \frac{v_0 v}{g} \cdot \sin\,\beta.$$

В полученном выражении только угол β может зависеть от угла бросания α (остальные величины в этой формуле являются константами). При $\beta = 90°$

функция $\sin\beta$ принимает максимальное значение, равное единице. Поэтому становится очевидным, что для достижения максимальной дальности полета камень надо бросать под таким углом α, чтобы вектор конечной скорости $\vec{v}$ оказался перпендикулярным вектору начальной скорости $\vec{v}_0$!

С учетом сказанного можно сделать вывод, что «треугольник скоростей» является прямоугольным, и из рисунка 14 найти искомый угол α:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_0}{v} \;\rightarrow\; \alpha = \operatorname{arctg}\frac{v_0}{v} = \operatorname{arctg}\left(\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh_0}}\right). \qquad (8)$$

В случае, если камень бросают с поверхности земли ($h_0 = 0$), мы приходим к результату, полученному при рассмотрении **примера 1**:

$$\alpha = \operatorname{arctg} 1 = 45°.$$

Из выражения (8) видно, что при $h_0 > 0$ угол $\alpha < 45°$, так как $\operatorname{tg}\alpha < 1$.

В разобранном примере мы познакомили читателя только с одним примером применения так называемого геометрического метода к решению задач о движении тела, брошенного под углом к горизонту, где в основу решения было положено рассмотрение «треугольника скоростей». Наряду с этим можно рассматривать «треугольник перемещений» – познакомиться с таким способом решения задач можно, изучив публикации из списка рекомендованной литературы к данной статье, в которых разобран целый ряд интересных задач баллистики.

Домашнее задание

Задача 1. Под каким углом α к горизонту надо бросить камень с горизонтальной поверхности земли, чтобы дальность его полета оказалась равной максимальной высоте подъема? (Ответ: $\alpha = \operatorname{arctg} 4 \approx 76°$.)

Задача 2. Камень выпускают из рогатки с некоторой высоты над горизонтальной поверхностью земли так, чтобы достичь максимальной дальности полета. Начальная скорость камня $v_0 = 30\,\text{м/с}$, а его скорость непосредственно перед падением на землю $v = 40\,\text{м/с}$. Найдите время полета камня. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10\ \text{м/с}^2$. (Ответ: $t = \sqrt{v_0^2 + v^2}/g = 5$ с.)

Задача 3*[1]. Камень бросают сверху вниз со склона горы, имеющей постоянный угол наклона β к горизонту. Под каким углом α к поверхности горы надо бросать камень, чтобы дальность его полета была максимальной? (Ответ: $\alpha = 45° + \frac{\beta}{2}$.)

Задача 4*. Камень брошен с вертикальной башни так, что дальность его полета максимальна. Найдите время полета камня, если точка падения камня на горизонтальную поверхность земли отстоит от точки бросания на расстоянии $S = 80$ м. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10\ \text{м}/\text{с}^2$. (Ответ: $t = \sqrt{\frac{2S}{g}} = 4$ с.)

Задача 5*. С какой минимальной скоростью v_0 и под каким углом α к горизонту необходимо бросить камень с горизонтальной поверхности земли, чтобы он смог перелететь через тонкую вертикальную стену высотой h? Точка бросания камня находится на расстоянии l от стены. (Ответ: $v_0 = \sqrt{g\left(h + \sqrt{h^2 + l^2}\right)}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h + \sqrt{h^2 + l^2}}{l}$.)

Литература

1. *Подлесный Д. В., Александров Д. А.* О движении тела, брошенного под углом к горизонту // Потенциал. – 2010. – № 1.

2. *Коновалов А. А.* Геометрические идеи при решении баллистических задач // Потенциал. – 2013. – № 1.

3. *Мартемьянова Т. Ю.* Как не быть мазилой // Квант. – 2018. – № 7. – С. 37–41. – URL: http://kvant.mccme.ru/pdf/2018/2018-07.pdf.

[1] Задачи, отмеченные знаком *, имеют повышенную степень сложности и рекомендуются для обучающихся, проходящих дополнительную подготовку к участию в олимпиадах школьников по физике.

Динамика

Вес тела, движущегося с ускорением

Физическая величина «вес» изучается в тематическом блоке «Динамика». Практика показывает, что обучающиеся могут испытывать ряд затруднений, связанных с этим понятием. Школьники довольно часто путают вес с массой, считают вес скалярной физической величиной, хотя вес – это сила, т. е. векторная физическая величина, неправильно указывают точку приложения этой силы, либо отождествляют вес с силой тяжести или с силой реакции опоры. В связи с этим на уроке рекомендуется прежде всего аккуратно сформулировать определение веса, акцентируя внимание на векторном характере этой величины, и продемонстрировать отличие веса от силы тяжести и силы реакции, действующих на ускоренно движущееся тело.

В различных литературных источниках довольно часто встречается путаница, связанная с понятием «вес». Например, в некоей научно-популярной заметке о веществе нейтронной звезды говорится: «Это самая плотная форма материи: *чайная ложка ее вещества весит около 1 млрд тонн*». В продуктовом магазине вам взвешивают товар и результат называют в килограммах. Часто говорят о весе тела на Луне или о невесомости в космосе, но при этом даже в Физическом энциклопедическом словаре [4] говорится, что «вес – численная величина силы тяжести, действующая на тело, находящееся вблизи *земной* поверхности». В связи с этой путаницей могут возникать разные недоразумения.

Воспользуемся утверждениями, сформулированными в Физической энциклопедии [5].

«Вес – сила, с которой любое тело, находящееся в поле сил тяжести (как правило, создаваемом каким-либо небесным телом, например Землей, Солнцем и т. д.), действует на опору или подвес, препятствующую свободному падению тела. В частном случае, когда опора (подвес) покоится или равномерно и прямолинейно движется относительно какой-либо инерциальной системы отсчета, вес тела по величине и направлению совпадает с силой тяжести».

«Вес и сила тяжести приложены к разным объектам (вес – к опоре или подвесу, сила тяжести – к телу) и имеют различную физическую природу (соответственно, вес – упругую, т. е. по существу электромагнитную, а сила тяжести – гравитационную)».

«В общем случае движения опоры (подвеса) или самого тела с ускорением относительно инерциальной системы отсчета вес перестает совпадать с силой тяжести».

В школьном учебнике физики (В. А. Касьянов «Физика. 10 класс, углубленный уровень») различные возможные случаи рассмотрены в разделе «Применение законов Ньютона» отдельно от определения веса. При этом для ускоренного движения говорится о силе реакции опоры там, где подразумевается вес тела, движущегося с ускорением. Полезно при рассмотрении этого материала еще раз четко обсудить определение веса и силы тяжести, воспользовавшись, например, приведенными выше нормативными определениями из «Физической энциклопедии». Также рекомендуется обратиться к материалу, изложенному в пособии [8].

Рассмотрим ряд примеров, иллюстрирующих определение веса тел, движущихся с ускорением относительно инерциальной системы отсчета.

Пример 1. Автомобиль разгоняется на горизонтальном участке дороги с ускорением $a = 2{,}5$ м/с^2. Определите вес сидящего в кресле пассажира массой $m = 60$ кг во время разгона. Ускорение свободного падения равно 9,8 м/с^2.

Решение. На пассажира действуют сила тяжести $m\vec{g}$ со стороны Земли и сила реакции $\vec{N}$ со стороны кресла. На сиденье действуют вес пассажира $\vec{P}$, модуль которого равен (по третьему закону Ньютона) модулю силы реакции (см. рис. 15). Силу реакции разложим на составляющие: $\vec{N}_\text{в}$ (уравновешивает силу тяжести) и $\vec{N}_\text{г}$ (сообщает горизонтальное ускорение пассажиру):

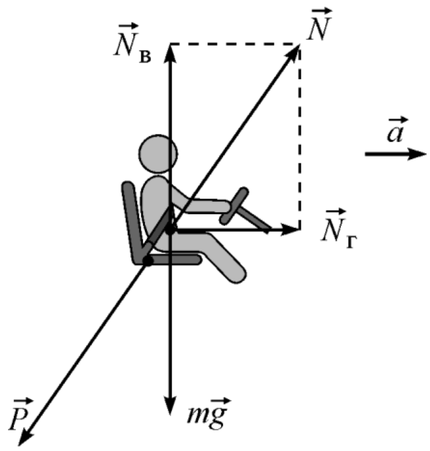


Рис. 15

$$\begin{cases} N_\text{в} = mg, \\ N_\text{г} = ma \end{cases} \Rightarrow \quad N = \sqrt{(mg)^2 + (ma)^2}$$

$$= m\sqrt{g^2 + a^2}.$$

Модуль веса равен модулю силы реакции:

$$P = N = m\sqrt{g^2 + a^2} = 60 \cdot \sqrt{9{,}8^2 + 2{,}5^2} \approx 607 \text{ Н.}$$

Вектор $\vec{P}$ составляет с вертикалью угол $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{a}{g} \approx 14°$.

Пример 2. Автомобиль движется со скоростью $v = 36$ км/ч по выпуклому мосту. Определите вес сидящего в кресле пассажира массой

$m = 60$ кг в момент, когда автомобиль находится в верхней точке моста. Радиус кривизны моста в этой точке равен $R = 60$ м. Ускорение свободного падения равно 9,8 м/с^2.

Решение. На пассажира действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции $\vec{N}$ со стороны сиденья (рис. 16). Эти силы сообщают пассажиру центростремительное ускорение $a_n = v^2/R$, направленное вниз, к центру кривизны моста. По второму закону Ньютона

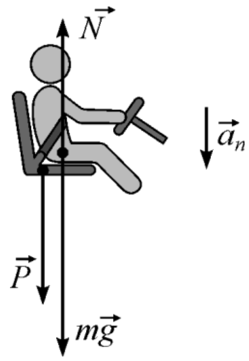


Рис. 16

$$ma_n = mg - N.$$

Сила реакции равна по модулю весу. Отсюда:

$$P = N = mg - ma_n = m\left(g - \frac{v^2}{R}\right) = 60 \cdot \left(9{,}8 - \frac{10^2}{60}\right) = 448 \text{ Н.}$$

Домашнее задание

Задача. Автомобиль движется со скоростью 36 км/ч по вогнутому мосту. Определите вес сидящего в кресле пассажира массой 60 кг в момент, когда автомобиль находится в нижней точке моста. Радиус кривизны моста в этой точке равен 60 м. Ускорение свободного падения равно 9,8 м/с^2. (Ответ: 688 Н.)

Литература

1. *Пикин С.* Невесомость... в автомобиле? // Квант. – 1997. – № 3. – С. 34. – URL: http://kvant.mccme.ru/pdf/1997/03/kv0397pikin.pdf.

Статика твердого тела

Устойчивое, неустойчивое, безразличное равновесие

На изучение тематического блока «Статика твердого тела» в РП СОО отводится 5 ч. Сначала рекомендуется ввести понятия устойчивого, неустойчивого и безразличного равновесия механической системы, а также рассмотреть условия устойчивости. Затем, при решении задач, всякий раз следует обращать внимание на характер равновесия, т. е. обсуждение устойчивости должно проходить через всю тему.

Исторически учение о механическом равновесии возникло гораздо раньше науки о движении тел – некоторые задачи о равновесии механических конструкций рассматривались древними учеными и строителями уже за 2–3 тысячелетия до появления классической динамики. Не угас интерес к этой теме и в последующие века. Например, среди замечательных «шедевров равновесия» можно отметить, «мост Леонардо-да-Винчи» – при желании любой школьник может воспроизвести это сооружение, собрав его из одинаковых палочек без каких-либо креплений (рис. 17)[1].

Под механическим равновесием понимается такое состояние покоя механической системы, в котором одни внешние воздействия на нее компенсируются другими (или отсутствуют). При этом говорят, что система находится в положении равновесия.

Изучение механического равновесия и условий его возникновения происходит в рамках раздела механики, который называется статикой. Одним из важнейших вопросов статики является поиск условий *устойчивости равновесия* механической системы. Наиболее простые результаты получаются при рассмотрении условий равновесия абсолютно твердого тела, т. е. такого тела, расстояние между двумя любыми точками которого сохраняется неизменным.

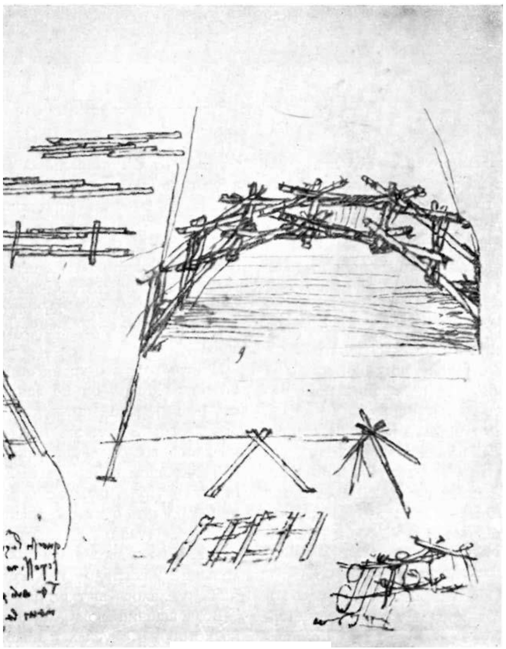


Рис. 17

[1] Иллюстрация из кн.: *Михайлов Б. П.* Леонардо да Винчи архитектор. – М.: Гос. изд-во литературы по строительству и архитектуре, 1952. – 79 с.

Если абсолютно твердое тело *немного* (строго говоря, бесконечно мало) сместить из положения равновесия и затем предоставить самому себе, то возможны три следующих варианта дальнейшего развития событий (на рис. 18 и рис. 19 показаны разные исходные состояния равновесия, проиллюстрированные при помощи шарика и вращающегося на горизонтальной оси прямоугольного бруска).

1. Тело под действием внешних сил вернется в положение равновесия. Такое положение называется *устойчивым* (рис. 18, *а* и 19, *а*).

2. Тело останется в новом положении, в которое его сместили. Это – *безразличное равновесие* (рис. 18, *б* и 19, *б*).

3. Тело будет еще сильнее отклоняться от положения равновесия. Это – *неустойчивое равновесие* (рис. 18, *в* и 19, *в*).

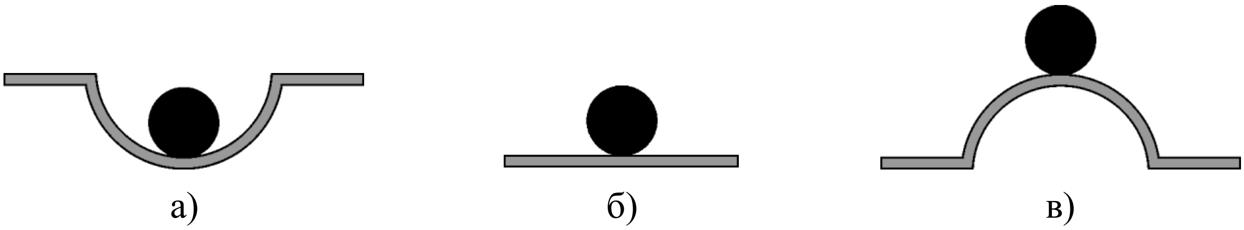


Рис. 18. Положение шарика в состоянии равновесия: *а* – шарик в лунке; *б* – шарик на плоскости; *в* – шарик на горке

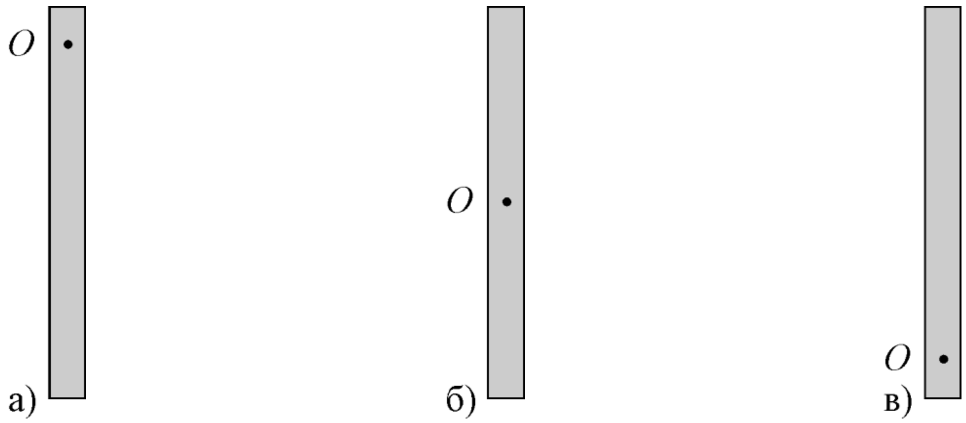


Рис. 19. Однородный брусок, подвешенный на горизонтальной оси *O*: *а* – ось сверху; *б* – ось проходит через центр тяжести; *в* – ось снизу

Если рассмотреть равновесие для случая, когда силы могут действовать не только в одной плоскости, но и в разных направлениях в пространстве, то может оказаться, что характер равновесия при смещении в разных направлениях окажется различным. На рисунке 20 изображен шарик, лежащий в гладкой горизонтальной трубе. Для него устойчивым является равновесие при смещении в плоскости *YZ*, безразличным – при смещении вдоль оси *X*.

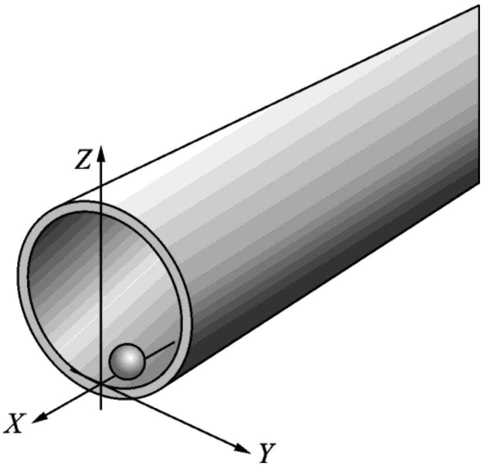


Рис. 20

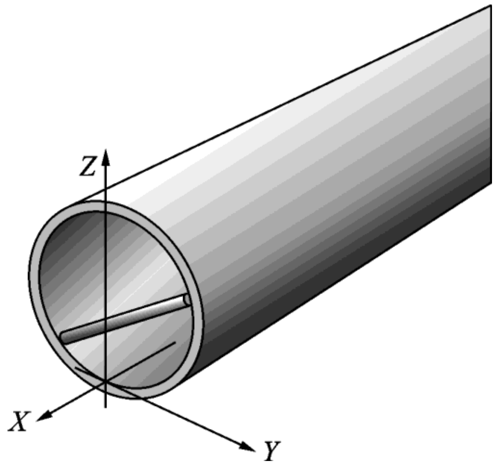


Рис. 21

Пусть теперь в той же трубе находится тонкая палочка, расположенная в плоскости YZ (рис. 21). Равновесие этой палочки при смещении в плоскости YZ (без отрыва от стенок трубы) является неустойчивым. При этом равновесие палочки при смещении вдоль оси X устойчиво только при строго определенном положении палочки в трубе.

Условия равновесия абсолютно твердого тела следуют из теоремы о движении центра масс и из уравнения моментов. Для того чтобы абсолютно твердое тело находилось в равновесии, необходимо, чтобы одновременно были равны нулю: 1) сумма всех внешних сил, приложенных к телу; 2) сумма моментов всех внешних сил, приложенных к телу.

Отметим, что эти условия равновесия являются необходимыми, но не достаточными, поскольку первое условие допускает равномерное прямолинейное движение центра масс тела, а второе – позволяет телу равномерно вращаться.

Кроме того, если все приложенные к телу внешние силы лежат в одной плоскости, то необходимо требовать равенства нулю суммы моментов этих сил относительно оси, которая перпендикулярна указанной плоскости. Легко доказать, что эта ось может быть любой (можно поручить обучающимся в качестве упражнения самостоятельно провести это доказательство).

Также можно доказать следующее утверждение: *устойчивому равновесию механической системы, находящейся в поле консервативных сил, соответствует минимум ее потенциальной энергии.*

Согласно РП СОО, закон сохранения механической энергии рассматривается после раздела «Статика твердого тела». Однако, ученики 10 класса уже знакомы с понятием «механическая энергия» и со связью между изменением энергии и работой силы. Поэтому полезно при рассмотрении устойчивости равновесия системы показать (пусть и не совсем математически строго) связь между проекцией F_x консервативной силы на некоторую ось X и потенциальной энергией $F_x = -\left.\frac{dU_{\text{пот}}}{dx}\right|_{y,\, z = \text{const}}$.

С помощью этой формулы можно показать, что если потенциальная энергия в положении равновесия минимальна, то при смещении тела из этого положения возникает возвращающая сила, т. е. равновесие устойчивое. Напротив, если потенциальная энергия в положении равновесия максимальна, то при смещении тела из этого положения возникает сила, еще дальше уводящая тело от положения равновесия.

Рассмотрим пример задачи об исследовании устойчивости равновесия.

Пример 1. Однородная доска находится в прямом двугранном угле с гладкими стенками. Этот двугранный угол наклонен под углом α к горизонту (рис. 22, *а*). Движение доски возможно только в плоскости рисунка без отрыва от стенок. Найдите при помощи построения положение равновесия доски. Каким будет это равновесие – устойчивым или неустойчивым?

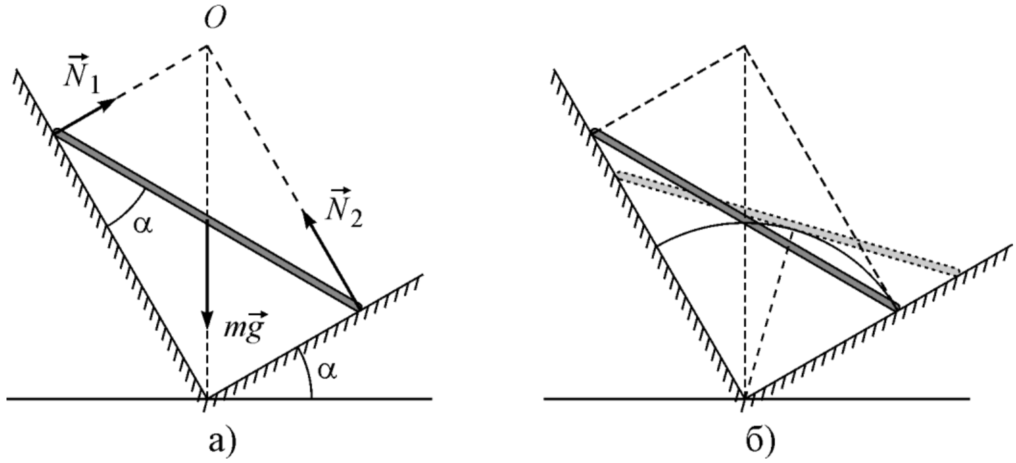


Рис. 22

Решение. Поскольку стенки двугранного угла гладкие, трение отсутствует. На доску действуют сила тяжести mg и две силы реакции стенок N_1 и N_2, направленные перпендикулярно граням угла (см. рис. 22, *а*). Все эти силы лежат в одной плоскости, при этом линии действия сил N_1 и N_2 пересекаются в некоторой точке *O*. Предположим, что доска находится в равновесии. Так как в положении равновесия сумма моментов трех указанных сил относительно любой оси, перпендикулярной плоскости рисунка, должна быть равна нулю, то линия действия силы тяжести тоже обязательно проходит через точку *O*.

Доказанное утверждение является частным случаем так называемой теоремы о трех силах: *если абсолютно твердое тело находится в положении равновесия под действием только трех сил, линии действия этих сил пересекаются в одной точке.*

Продолжим рассмотрение примера. Положение доски в равновесии можно найти при помощи построения (рис. 22, *б*). Проведем вертикаль через вершину угла (это линия действия силы тяжести) и отложим на ней отрезок, равный длине доски. Из конца этого отрезка опустим перпендикуляры на грани угла. Получится прямоугольник, образованный сторонами угла и отложенными перпендикулярами. Одна диагональ в нем – вертикаль, вторая диагональ – положение доски в равновесии.

В устойчивом положении равновесия потенциальная энергия минимальна, а в неустойчивом – максимальна. Для выяснения характера равновесия рассмотрим, как изменяется высота центра тяжести доски при скольжении ее концов по граням угла. Центр тяжести доски будет двигаться по дуге окружности с радиусом, равным половине длины доски (можно предложить обучающимся доказать это утверждение). Поскольку в положении равновесия центр тяжести доски находится на вертикали, потенциальная энергия доски в этом положении максимальна, т. е. ее положение неустойчиво.

Для тел, покоящихся в однородном поле силы тяжести и имеющих *свободную поверхность опоры*, вводится понятие *степень устойчивости.* Степень устойчивости определяется максимальным углом, на который нужно отклонить тело от положения равновесия, чтобы тело потеряло устойчивость и упало (перевернулось).

На рисунке 23, *а* изображен однородный цилиндр, покоящийся на нижнем основании в состоянии устойчивого равновесия. Если отклонить цилиндр от вертикали на небольшой угол (рис. 23, *б*), то момент силы тяжести $\vec{F}_т$ будет стремиться вернуть тело в исходное положение (l – плечо этой силы). На рисунке 23, *в* показан случай, когда цилиндр переведен в состояние неустойчивого равновесия, при этом угол отклонения цилиндра от исходного положения как раз и определяет степень устойчивости. Условия равновесия в положении, показанном на рисунке 23, *в* выполнены, но малейшее отклонение цилиндра от данного положения в одну или в другую сторону приведет либо к возвращению тела через промежуточное положение (рис. 23, *б*) в исходное состояние (рис. 23, *а*), либо к падению тела (рис. 23, *г*). В последнем случае цилиндр ляжет на боковую поверхность и займет новое положение устойчивого равновесия. Полезно обсудить с обучающимися, как изменяется потенциальная энергия цилиндра при переходе из исходного состояния (см. рис. 23, *а*) в состояние, показанное на рисунке 23, *г*.

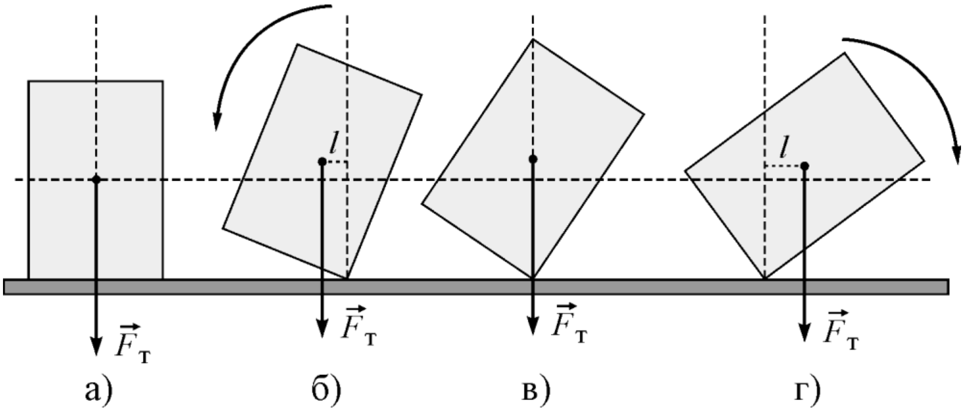


Рис. 23

Рассмотренный пример иллюстрирует следующее утверждение (его также можно доказать): *абсолютно твердое тело, имеющее свободную поверхность опоры, будет находиться в равновесии в однородном поле силы тяжести до тех пор, пока линии действия приложенной к этому телу силы тяжести будет проходить через поверхность его опоры*.

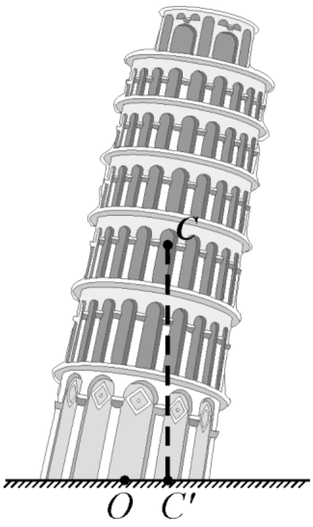


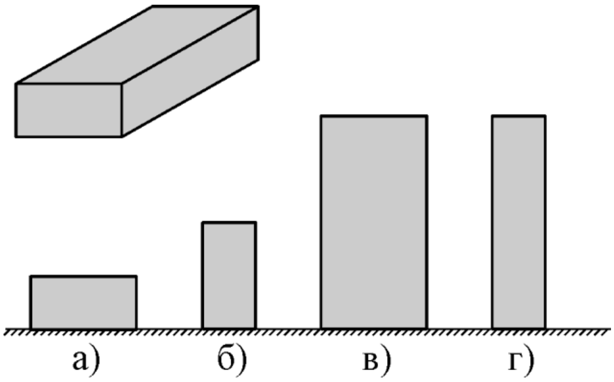
Рис. 24

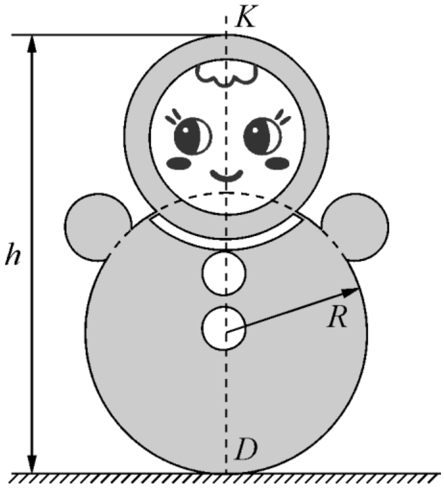
В качестве еще одной иллюстрации этого утверждения можно привести пример Пизанской башни (рис. 24). Линия CC′ действия приложенной к ней силы тяжести проходит сбоку от центра *O* основания фундамента, но не выходит за пределы этого основания. Поэтому башня, несмотря на свой наклон, не падает.

Дополнительно рекомендуется ознакомиться с материалом по данной теме, изложенным в пособии [8].

Домашнее задание

Задача 1. Сравните степень устойчивости для четырех разных положений кирпича с размерами 15 × 30 × 60 см (см. рис.). Угол наклона во всех случаях а) – г) отсчитывается от горизонтали. (Ответ: а) 90°– α, где arctg α = 0,5; б) α, где arctg α = 0,5; в) α, где arctg α = 0,5; г) α, где arctg α = 0,25.)





Задача 2. Детская игрушка неваляшка представляет собой фигуру высотой $h = 21$ см и массой $M = 300$ г с симметричным распределением массы относительно геометрической оси симметрии *KD* (см. рис.). Поверхность нижней части игрушки представляет собой часть сферы радиусом $R = 6$ см. Если неваляшку поставить на шероховатую плоскую поверхность, наклоненную под углом $\alpha = 30°$ к горизонту, то неваляшка займет устойчивое положение равновесия, при котором ее ось *KD* отклоняется от вертикали на угол $\beta = 45°$. Какую наименьшую массу пластилина надо прикрепить к верхней точке *K* неваляшки, чтобы игрушка потеряла устойчивость на горизонтальной поверхности стола? (Ответ: $m = \frac{MR\sin\alpha}{(h-R)\sin\beta} \approx 85$ г.)

Литература

Варламов А. Равновесие механической системы и метод виртуальных перемещений // Квант. – 1989. – № 1. – С. 45–47. – URL: http://kvant.mccme.ru/1989/01/ravnovesie_mehanicheskoj_siste.htm.

Законы сохранения в механике

Потенциальная энергия в поле однородного массивного шара. Движение небесных тел и их спутников. Космические скорости. Законы Кеплера

В РП СОО вопросы «Движение небесных тел и их спутников», «Космические скорости» и «Законы Кеплера» включены в тематический блок «Динамика». Однако для более полного понимания данной темы обучающимся также потребуются знания материала из тематического блока «Законы сохранения в механике». Поэтому считаем целесообразным выделить данные вопросы в отдельный учебный модуль. Принимая во внимание, что на весь раздел «Механика» отводится 35 ч, включая 10 ч на блок «Динамика» и 10 ч на блок «Законы сохранения в механике», вопросам, связанным с движением небесных тел, рекомендуем посвятить от 2 до 3 ч.

Изложение материала рекомендуется начать с записи выражений для силы, действующей на материальную точку в гравитационном поле однородного шара (внутри и вне шара), а также выражения для потенциальной энергии материальной точки в этом поле. После этого следует рассмотреть задачу о движении материальной точки в гравитационном поле планеты, считая ее неподвижным однородным шаром, получить выражения для круговой и параболической скоростей (частными случаями которых являются первая и вторая космическая скорость), дать понятие о третьей космической скорости.

Завершить изложение материала следует формулировками, а по возможности и доказательствами, пусть даже в частных случаях, законов Кеплера. Обязательно нужно показать, что второй закон Кеплера есть прямое следствие закона сохранения момента импульса. Доказательство же третьего закона Кеплера можно проиллюстрировать для круговых орбит планет.

1. Сила, действующая на материальную точку в гравитационном поле однородного шара, и потенциальная энергии тела в этом поле

1.1. Сила, действующая на небольшое тело (материальную точку), находящуюся в гравитационном поле однородного шара и расположенную вне этого шара, может быть найдена по формуле:

$$F = G\frac{Mm}{r^2}, \qquad (9)$$

где $G \approx 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{кг}^2}$ – гравитационная постоянная, m – масса тела, M – масса шара, r – расстояние от тела до центра шара. Следует отметить, что эта формула выводится из закона всемирного тяготения, и она справедлива, если $r \geq R$ (R – радиус шара; рис. 25).

Рассматривая некоторую планету массой M как однородный шар радиусом R, нетрудно получить зависимость ускорения свободного падения $g_{h\uparrow}$ от высоты подъема h над поверхностью планеты.

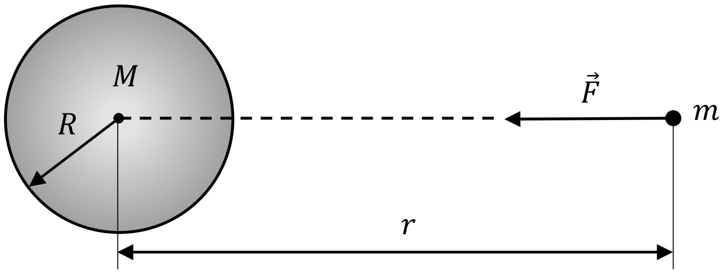


Рис. 25

Согласно второму закону Ньютона, искомое ускорение будет равно отношению силы тяготения к массе падающего тела. Таким образом, имеем:

$$g_{h\uparrow} = \frac{F}{m} = G\frac{M}{r^2} = G\frac{M}{(R+h)^2} = G\frac{M}{R^2}\cdot\left(\frac{R}{R+h}\right)^2 = g\cdot\left(\frac{R}{R+h}\right)^2.$$

Здесь мы учли, что $G\frac{M}{R^2} = g$ – ускорение свободного падения у поверхности планеты.

Теперь рассмотрим случай, когда $r \leq R$. Представим себе, что в шаре проделан тонкий прямой канал, идущий вплоть до его центра (рис. 26). Поместим в этот канал наше тело на расстоянии r от центра шара, как показано на рисунке, и найдем силу, действующую на тело, и его потенциальную энергию.

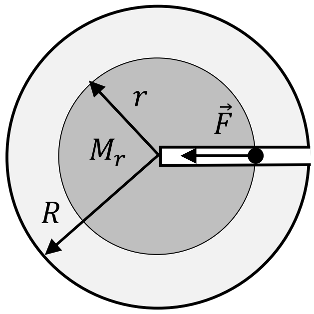


Рис. 26

Расчеты показывают, что силы тяготения, действующие на тело со стороны частей шара, удаленных от его центра на расстояния, большие чем r (на рисунке светлая область), взаимно компенсируются (это можно доказать с помощью закона всемирного тяготения и соображений симметрии). Таким образом, результирующая сила, действующая на наше тело, будет равняться суммарной силе тяготения, которая действует только со стороны затемненной на рисунке части шара. Эта часть является шаром радиусом r и имеет массу $M_r = \frac{r^3}{R^3}M$.

С учетом этого и в соответствии с формулой (9) приходим к выражению для силы тяготения, действующей на наше тело со стороны шара при условии, что $r \leq R$:

$$F = G\frac{M_r m}{r^2} = G\frac{Mm}{R^2}\cdot\frac{r}{R} = mg\cdot\frac{r}{R}.$$

С учетом этого нетрудно получить выражение для ускорения свободного падения $g_{h\downarrow}$ тела, которое находится в шахте на глубине h (относительно поверхности планеты), считая по-прежнему планету однородным шаром массой M и радиусом R:

$$g_{h\downarrow} = \frac{F}{m} = g\cdot\frac{r}{R} = g\cdot\left(1-\frac{h}{R}\right).$$

1.2. Выражение для потенциальной энергии тела, находящегося в гравитационном поле однородного шара, может быть получено путем вычисления работы, которую совершает сила тяготения при перемещении тела из данного положения в положение с нулевой потенциальной энергией (о котором изначально договариваются). Здесь потребуются навыки интегрирования.

Если за положение с нулевой потенциальной энергией принять бесконечно удаленную от шара точку (при этом гравитационная сила также равна нулю), то для энергии тела на удалении r от центра шара в ситуации, когда $r \geq R$, получаем:

$$E_p(r) = -\int_r^\infty F(r)\,dr = -\int_r^\infty G\frac{Mm}{r^2}dr = -G\frac{Mm}{r}. \qquad (10)$$

Знак «–» перед первым интегралом необходим потому, что сила притяжения к шару совершает отрицательную работу при удалении тела от шара.

Возникает вопрос: а как же быть с известной формулой $E_p = mgh$? Дело в том, что физический смысл имеет не само значение потенциальной энергии, а лишь ее изменение.

Давайте найдем разность между потенциальной энергией E_{p2} нашего тела, находящегося на некоторой высоте h ($h \ll R$) от поверхности шара, и потенциальной энергией E_{p1} этого тела, находящегося на поверхности шара. Используя формулу (10), получим:

$$E_{p2} - E_{p1} = -G\frac{Mm}{R+h} - \left(-G\frac{Mm}{R}\right) = m\cdot G\frac{M}{R^2}\cdot h\cdot\frac{R}{R+h} \approx mgh.$$

Множитель $\frac{R}{R+h}$ практически равен единице при условии, что $h \ll R$. Именно при этом условии, когда гравитационное поле шара можно считать однородным, и применяется формула $E_p = mgh$. При этом потенциальная энергия тела, находящегося на поверхности шара, полагается тождественно равной нулю.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда $r \leq R$. Будем по-прежнему полагать нулевой потенциальную энергию тела в бесконечно удаленной от шара точке. Потенциальная энергия при этом также ищется путем вычисления работы (с помощью интегрирования), но теперь нужно учитывать, что сила тяготения по-разному зависит от r внутри и вне шара:

$$E_p(r) = -\int_r^\infty F(r)\,dr = -\int_r^R G\frac{Mm}{R^3}rdr - \int_R^\infty GMm\frac{dr}{r^2} = -\frac{3}{2}mgR + \frac{mg}{2R}\cdot r^2.$$

Итак, для потенциальной энергии тела в гравитационном поле однородного шара имеем следующие выражения внутри $(r \leq R)$ и вне $(r \geq R)$ шара:

$$E_p(r) = \begin{cases} -\frac{3}{2}mgR + \frac{mg}{2R}\cdot r^2, & (r \leq R); \\ -G\frac{Mm}{r} = -mgR\cdot\frac{R}{r}, & (r \geq R). \end{cases} \tag{11}$$

При $r = R$ полученные выражения, разумеется, дают одинаковый результат.

Пример 1. Представим себе нашу Землю как однородный твердый шар, внутри которого нет никакой раскаленной магмы. Вообразим, что сквозь нашу планету через ее центр проходит прямая шахта. С какой скоростью v пролетит через центр Земли маленький камень массой m, упавший в эту шахту, если его отпустить у поверхности Земли без начальной скорости? Радиус Земли R и ускорение свободного падения g у ее поверхности считайте известными. Трением и вращением Земли пренебречь.

Решение. Полная механическая энергия камня складывается из его потенциальной и кинетической энергий. В отсутствие сил трения эта энергия изменяться не будет. Таким образом, применяя закон сохранения механической энергии с учетом первого из соотношений (11), приходим к уравнению:

$$-\frac{3}{2}mgR + \frac{mg}{2R}\cdot R^2 = -\frac{3}{2}mgR + \frac{mv^2}{2},$$

откуда и находим искомую скорость:

$$v = \sqrt{gR}.$$

Заметим, что скорость v, как и следовало ожидать, не зависит от массы m тела. Как будет показано ниже, эта скорость окажется равной первой космической скорости.

2. Космические скорости

2.1. Рассмотрим следующую задачу о движении маленького тела массой m в гравитационном поле неподвижной планеты массой M и радиусом R. Пусть в начальный момент тело находится на удалении r от центра планеты $(r > R)$ и ему сообщают начальную скорость v в направлении, перпендикулярном радиальному направлению (рис. 27). Требуется определить, по какой траектории будет двигаться тело.

В рассматриваемой ситуации при $v \neq 0$ траектория движения может быть эллипсом, параболой или гиперболой в зависимости от того, какой знак имеет полная механическая энергия E тела, равная сумме его кинетической энергии $E_к$ и потенциальной энергии E_p:

$$E = E_к + E_p = \frac{mv^2}{2} - G\frac{Mm}{r}.$$

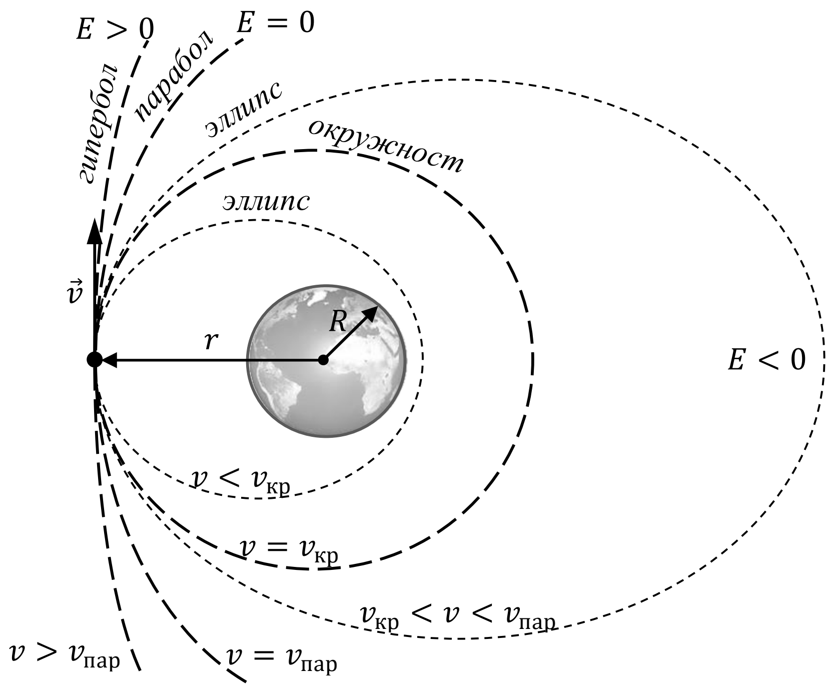


Рис. 27

При отрицательном значении полной механической энергии тела, т. е. при $E < 0$, его движение происходит по эллиптической орбите.

Такое движение происходит при скоростях, удовлетворяющих неравенству:

$$v < \sqrt{2G\frac{M}{r}}.$$

В частном случае эллипс может представлять собой окружность радиусом r. Скорость v, с которой тело движется по окружности вокруг планеты, называют круговой $v_{\text{кр}}$. Ее нетрудно найти из второго закона Ньютона в рассматриваемой ситуации:

$$m\frac{v_{\text{кр}}^2}{r} = G\frac{mM}{r^2} \quad \Longrightarrow \quad v_{\text{кр}} = \sqrt{G\frac{M}{r}} = \sqrt{gR} \cdot \sqrt{\frac{R}{r}}\,. \tag{12}$$

Если тело запущено на круговую орбиту вблизи поверхности планеты (т. е. $r \approx R$), то необходимую для такого движения круговую скорость называют первой космической скоростью. В соответствии с (12), для первой космической скорости v_1 имеем:

$$v_1 = \sqrt{G\frac{M}{R}} = \sqrt{gR}\,. \tag{13}$$

Если при $r \approx R$ скорость тела будет меньше первой космической, то оно непременно упадет на планету. Поэтому часто первой космической скоростью называют минимально возможную скорость, при которой тело становится спутником планеты, если стартует с ее поверхности.

Когда полная механическая энергия тела равна нулю ($E = 0$)*, его движение происходит по параболической траектории.*

В такой ситуации телу хватает запаса начальной кинетической энергии, чтобы преодолеть притяжение планеты и, улетев «на бесконечность», там остановиться. Начальную скорость v при таком движении называют параболической $v_{\text{пар}}$. Ее нетрудно найти из закона сохранения механической энергии:

$$\frac{mv_{\text{пар}}^2}{2} - G\frac{Mm}{r} = 0 \quad \Longrightarrow \quad v_{\text{пар}} = \sqrt{2G\frac{M}{r}} = \sqrt{2gR} \cdot \sqrt{\frac{R}{r}}\,. \tag{14}$$

Заметим, что параболическая скорость в $\sqrt{2}$ раз больше круговой скорости:

$$v_{\text{пар}} = \sqrt{2}v_{\text{кр}}.$$

Если тело стартует с поверхности планеты ($r = R$), то параболическую скорость называют второй космической скоростью. В соответствии с (13) и (14) для второй космической скорости v_2 имеем:

$$v_2 = \sqrt{2G\frac{M}{R}} = \sqrt{2gR} = \sqrt{2}v_1.$$

Вторая космическая скорость представляет собой минимальную начальную скорость, при которой тело, стартуя с поверхности планеты, в состоянии преодолеть притяжение планеты и улететь «на бесконечность». При этом, вообще говоря, не важно, в каком направлении стартует тело. Оно все равно улетит «на бесконечность» и в пределе, т. е. через очень большое время, там остановится.

На Земле ($R \approx 6400$ км, $g \approx 9{,}8\ \text{м/с}^2$):

$$v_{1\,\text{Зем}} \approx 7{,}9\,\text{км/с};\ \ v_{2\,\text{Зем}} \approx 11{,}2\,\text{км/с}.$$

Когда полная механическая энергия тела положительна ($E > 0$), *его движение происходит по гиперболической траектории.*

Такое движение происходит при скоростях, удовлетворяющих неравенству:

$$v > \sqrt{2G\frac{M}{r}}.$$

Описанные ситуации схематично изображены на рисунке 27.

Пример 2. Найдите первую и вторую космическую скорость па планете, плотность которой в 4 раза больше средней плотности Земли, а радиус – в 3 раза меньше земного.

Решение. Выразим первую космическую скорость через плотность ρ планеты и ее радиус R:

$$v_1 = \sqrt{G\frac{M}{R}} = \sqrt{G\frac{(4/3)\pi R^3 \rho}{R}} = \sqrt{\frac{4}{3}\pi G} \cdot R \cdot \sqrt{\rho}.$$

Принимая во внимание, что $R = R_{\text{Зем}}/3$, а $\rho = 4\rho_{\text{Зем}}$, выражаем первую космическую скорость на планете через аналогичную на Земле:

$$v_1 = \frac{2}{3} v_{1\,\text{Зем}} \approx 5{,}3\,\text{км/с}.$$

Что же касается второй космической скорости, то она всегда в $\sqrt{2}$ раз больше первой космической:

$$v_2 = \sqrt{2} v_1 \approx 7{,}4\,\text{км/с}.$$

2.2. Теперь перейдем к вопросу о третьей космической скорости.

Третьей космической скоростью v_3 на Земле называют минимальную скорость, при которой тело, преодолевая не только притяжение Земли, но и Солнца, может улететь и покинуть Солнечную систему. Минимальное значение третьей космической скорости достигается, если тело стартует с Земли в направлении орбитального движения Земли вокруг Солнца (поскольку в этом случае стартовая скорость тела относительно Земли складывается со скоростью орбитального движения Земли).

Движение Земли по орбите в первом приближении можно считать круговым и проходящим со скоростью $v_0 \approx 29{,}8$ км/с. Для того чтобы тело покинуло Солнечную систему при старте с земной орбиты, ему надо сообщить относительно Солнца скорость $v = \sqrt{2}v_0 \approx 42{,}1$ км/с.

Точное вычисление третьей космической скорости сопряжено с математическими трудностями, поскольку необходимо учитывать взаимодействие не двух, а трех тел: нашего тела, Земли и Солнца. Однако для оценки этой величины сначала можно пренебречь взаимодействием с Солнцем, пока тело «борется» с земным притяжением, а учесть его после того, как тело покинет «зону влияния» Земли.

Пусть u – скорость тела относительно Земли, после ухода из «зоны ее влияния». Тогда на основании изложенных ранее соображений приходим к уравнению: $v_0 + u = v = \sqrt{2}v_0$, откуда выражаем скорость u:

$$u = \left(\sqrt{2} - 1\right)v_0.$$

Записывая закон сохранения механической энергии для движения тела в «зоне влияния» Земли, приходим к уравнению:

$$\frac{mv_3^2}{2} - G\frac{mM}{R} = \frac{mu^2}{2}.$$

С учетом предыдущего окончательно имеем:

$$v_3 = \sqrt{\left(\sqrt{2} - 1\right)^2 v_0^2 + v_2^2} \approx 16{,}7 \text{ км/с},$$

где введено обозначение $v_2 = \sqrt{2G\frac{M}{R}} = v_{2\,\text{Зем}} \approx 11{,}2$ км/с.

3. Законы Кеплера

В результате длительной обработки многолетних наблюдений датского астронома Тихо Браге (1546–1601) немецкий ученый Иоганн Кеплер (1571–1630) установил три закона движения планет Солнечной системы. Первые два закона были опубликованы Кеплером в 1609 г., последний (третий) – в 1619 г. Законы Кеплера, как отмечает Д. В. Сивухин, естественным путем привели И. Ньютона к открытию закона всемирного тяготения. Рассмотрим каждый из законов Кеплера.

3.1. Первый закон Кеплера утверждает, что *каждая планета Солнечной системы движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце*.

Оставим этот закон без теоретического обоснования. Приведем здесь лишь некоторые математические сведения об эллипсе, являющемся, наряду с параболой и гиперболой, кривой второго порядка. Уравнение эллипса можно представить в виде:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

При $a > b$ на координатной плоскости XOY эллипс изображается замкнутой кривой, как показано на рисунке 28. При этом отрезок A_1A_2, длина которого равна $2a$, называется большой осью эллипса, а отрезок B_1B_2 длиной $2b$ – его малой осью. У эллипса есть два фокуса F_1 и F_2, лежащие на его большой оси и симметрично расположенные относительно начала координат O. При этом сумма расстояний l_1 и l_2 от фокусов до любой точки D эллипса остается постоянной и равной $2a$:

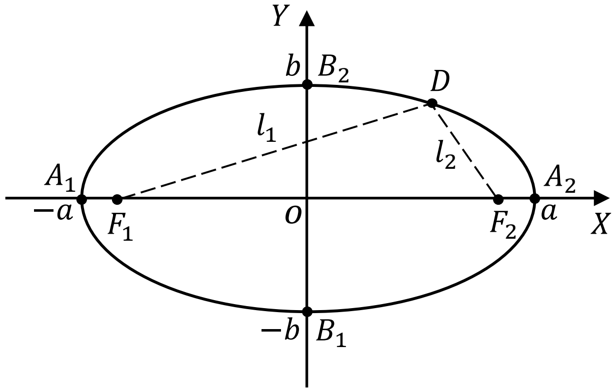


Рис. 28

$$l_1 + l_2 = 2a.$$

Последняя формула может служить определением эллипса.

Если точка D совпадает с одной из точек пересечения эллипса с его малой осью, т. е. с точкой B_1 или с точкой B_2, то $l_1 = l_2 = a$. С учетом этого на основании теоремы Пифагора нетрудно выразить фокусное расстояние c эллипса, равное длине отрезка OF_1 (или отрезка OF_2):

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Отметим также, что эксцентриситетом e эллипса называют отношение его фокусного расстояния c к длине большой полуоси a:

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$

При $a = b$ эллипс представляет собой окружность радиусом $R = a$. Окружность не обладает эксцентриситетом, т. е. ее эксцентриситет равен нулю. Поэтому эксцентриситет показывает степень отклонения эллипса от окружности.

Если планета, двигаясь по эллипсу вокруг Солнца, имеет скорость, направленную перпендикулярно направлению на светило, и эта скорость больше круговой скорости для данного удаления, то Солнце находится в ближнем к планете фокусе эллипса, а положение планеты называется перигелием. В противном случае Солнце находится в дальнем от планеты фокусе эллипса, а положение планеты называется апогелием или афелием (рис. 29). Отметим, что если речь идет о движении Луны или искусственных спутников вокруг Земли, то соответствующие точки называют перигеем и апогеем.

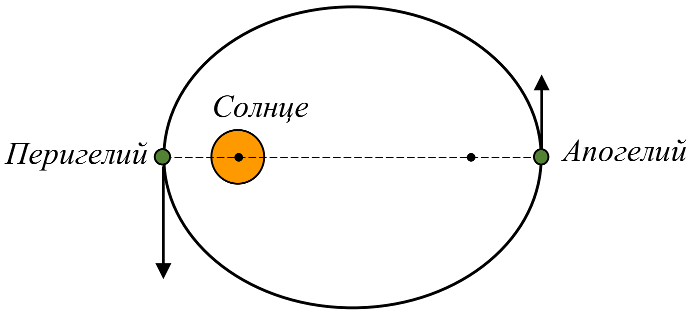


Рис. 29

3.2. Второй закон Кеплера утверждает, что *радиус-вектор планеты, проведенный от Солнца, «заметает» равные площади за равные промежутки времени.*

Введем *секториальную скорость* σ, как отношение малой площади dS, «заметенной» радиусом-вектором, к малому промежутку времени dt, за который эта площадь была «заметена»:

$$\sigma = \frac{dS}{dt}.$$

Тогда второй закон Кеплера можно перефразировать, утверждая, что *движение планеты вокруг Солнца происходит с постоянной секториальной скоростью.*

Покажем, что второй закон Кеплера является прямым следствием закона сохранения момента импульса. Пусть m – масса планеты, а v – ее скорость в момент, показанный на рисунке 30. Тогда за малый промежуток времени dt планета смещается на расстояние $v \cdot dt$, и, следовательно, радиус-вектор *«заметает»* площадь dS треугольника, закрашенного на рассматриваемом рисунке:

$$dS = \frac{1}{2} h \cdot v dt.$$

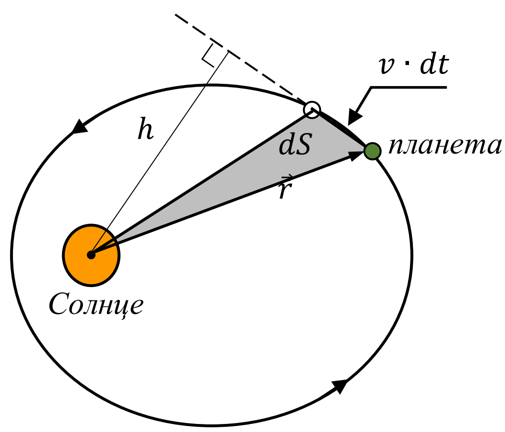


Рис. 30

Таким образом, для секториальной скорости σ имеем:

$$\sigma = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}hv.$$

Принимая во внимание выражение для момента импульса L планеты: $L = p \cdot h = mvh$, а также учитывая его сохранение при движении в центральном силовом поле, приходим и к сохранению секториальной скорости:

$$\sigma = \frac{1}{2}hv = \frac{L}{2m} = \text{const}.$$

3.2. Третий закон Кеплера гласит, что *квадраты периодов обращений планет относятся как кубы больших полуосей эллиптических орбит, по которым они движутся вокруг Солнца.* Иными словами утверждается, что *отношение квадрата периода T к кубу большой полуоси орбиты a есть величина постоянная для всех планет Солнечной системы*:

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{const}.$$

Убедимся в этом в частном случае, когда планета движется по круговой орбите радиусом r. Пусть M – масса Солнца, m – масса планеты, а v – ее скорость. Тогда согласно второму закону Ньютона с учетом закона всемирного тяготения приходим к уравнению:

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{mM}{r^2}.$$

Отсюда можно выразить скорость v, которая есть не что иное, как ранее полученная круговая скорость (12), и найти период обращения T:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}.$$

Нетрудно заметить, что

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}. \qquad (15)$$

Выражение, стоящее в правой части уравнения (15), не зависит ни от массы m планеты, ни от радиуса r ее круговой орбиты, а значит, принимает одно и то же значение для всех планет Солнечной системы.

Таким образом мы доказали третий закон Кеплера при движении планет по круговым орбитам:

$$\frac{T^2}{r^3} = \text{const}.$$

Общий случай, когда планеты движутся по эллиптическим орбитам, рассмотрен, например, в [6, гл. VIII]. Для эллиптических орбит с большой полуосью a выводится аналогичное соотношение:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}\,. \tag{16}$$

Отметим, что выше были сформулированы законы Кеплера применительно к Солнечной системе. Очевидно, что эти законы справедливы и для других планетных систем, где вокруг неподвижной массивной звезды движутся свои планеты.

Также отметим, что реально движение планеты происходит вокруг центра масс системы «звезда – планета», и сама звезда также движется вокруг этого центра масс. Учет этого приводит к поправке в формуле (16). Вместо массы M звезды в ней должна стоять суммарная масса звезды и планеты, т. е. $M + m$:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M+m)}. \tag{17}$$

Для Солнечной системы, когда $m \ll M$, эта поправка несущественна. Однако если масса m планеты соизмерима с массой звезды M, как, например, в системе «двойная звезда», то с данной поправкой необходимо считаться!

Пример 3. Искусственный спутник Земли движется по эллиптической орбите. Найдите длину большой полуоси a этой орбиты, если скорость спутника в перигее $v_1 = 8$ км/с, а в апогее $v_2 = 2$ км/с. Радиус Земли $R = 6400$ км, ускорение свободного падения у ее поверхности $g = 10$ м/с^2.

Решение. Пусть $m -$ масса спутника, r_1 и r_2 – удаления спутника от центра Земли в перигее и апогее соответственно, а $M -$ масса Земли ($M = \frac{gR^2}{G}$).

При движении спутника сохраняются его момент импульса относительно центра Земли, а также его полная механическая энергия. Приравнивая моменты импульса спутника в перигее и апогее и делая то же самое с его энергией, приходим к системе уравнений:

$$mv_1r_1 = mv_2r_2,$$

$$\frac{mv_1^2}{2} - G\frac{mM}{r_1} = \frac{mv_2^2}{2} - G\frac{mM}{r_2}\,.$$

Решая их, находим:

$$r_1 = \frac{2gR^2}{v_1(v_1 + v_2)}, \qquad r_2 = \frac{2gR^2}{v_2(v_1 + v_2)}.$$

Принимая во внимание, что $r_1 + r_2 = 2a$, окончательно имеем:

$$a = \frac{gR^2}{v_1 v_2} = 25600 \text{ км}.$$

Пример 4. Космический корабль движется вокруг планеты по круговой орбите радиусом r, совершая один оборот за время T. В некоторой точке A кратковременно включают тормозные двигатели, и корабль переходит на эллиптическую орбиту, касающуюся поверхности планеты (см. рис. 31). Сколько времени t движется космический корабль от точки A до точки касания с планетой? Радиус планеты R. Сопротивлением атмосферы планеты пренебречь.

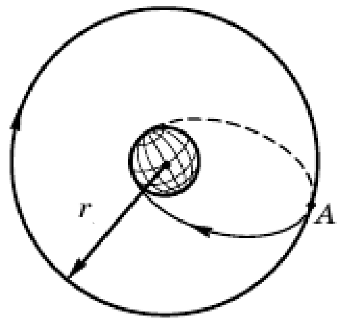


Рис. 31

Решение. Период движения по эллиптической орбите, на которую переходит спутник после торможения, в два раза больше искомого времени t. Принимая во внимание, что длина большой оси эллиптической орбиты равна сумме R и r, находим полуось орбиты $a = \frac{R+r}{2}$. Составляем уравнение на основании третьего закона Кеплера:

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{(2t)^2}{\left(\frac{R+r}{2}\right)^3},$$

откуда получаем окончательный результат:

$$t = \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \left(\frac{R}{r} + 1\right)^{3/2} \cdot T.$$

Пример 5. Две звезды с массами m_1 и m_2 образуют двойную звездную систему с неизменным расстоянием между звездами r. Найдите период обращения звезд вокруг их общего центра масс.

Решение. Нетрудно понять, что период обращения звезд относительно их общего центра масс есть не что иное, как период обращения одной звезды относительно другой. Воспользуемся третьим законом Кеплера в форме (17) и найдем искомый период:

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G(m_1 + m_2)}}.$$

Конечно же, эту задачу можно решать и в системе отсчета, связанной с центром масс звезд. Применяя определение центра масс, используя равенство модулей импульсов звезд и записывая второй закон Ньютона для каждой из звезд, можно прийти к системе уравнений:

$$m_1 r_1 = m_2 r_2,\ \ r_1 + r_2 = r; \qquad m_1 v_1 = m_2 v_2;$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{r_1} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad \frac{m_1 v_1^2}{r_1} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}; \qquad T = \frac{2\pi r_1}{v_1} = \frac{2\pi r_2}{v_2}.$$

Решая ее, мы придем к ранее полученному результату для периода T, но это потребует довольно кропотливого труда. В то же время, как мы убедились, применение третьего закона Кеплера позволяет сразу найти искомый период!

Домашнее задание

Задача 1. Оцените массу Солнца, если радиус орбиты Земли $r \approx 1{,}5{\cdot}10^8$ км, а продолжительность земного года составляет $T \approx 3{,}14 \cdot 10^7$с. (Ответ: $M_\text{с} = \frac{1}{G}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r^3 \approx 2 \cdot 10^{30}$ кг.)

Задача 2. Спутник, используемый в системе телесвязи, запущен в плоскости земного экватора так, что все время находится в зените для одной и той же точки земного шара. Найдите радиус r орбиты этого спутника. Радиус Земли R, продолжительность суток на Земле T и ускорение свободного падения у ее поверхности g считайте известными. (Ответ: $r = \sqrt[3]{\frac{gR^2T^2}{4\pi^2}} \approx 42000$ км.)

Задача 3. Какую скорость необходимо сообщить телу небольшой массы, находящемуся в центре однородного сферического астероида массой M и радиусом R, чтобы это тело через радиальную шахту в астероиде улетело бесконечно далеко от него? (Ответ: $v = \sqrt{3G\frac{M}{R}}$.)

Задача 4. Какой стала бы продолжительность земного года, если бы масса Земли сравнялась с массой Солнца, а расстояние между ними осталось бы прежним? (Ответ: $T \approx 0{,}7$ года.)

Задача 5*. Искусственный спутник Земли вращается по эллиптической орбите. Найдите период обращения спутника, а также скорость спутника v в точках пересечения эллипса с его малой осью, если скорости спутника в точках пересечения эллипса с большой осью равны $v_1 = 8$ км/с и $v_2 = 2$ км/с. Радиус Земли $R = 6400$ км, ускорение свободного падения у ее поверхности $g = 10$ м/с^2. (Ответ: $T = \frac{2\pi g R^2}{(v_1 v_2)^{3/2}} \approx 11$ ч; $v = \sqrt{v_1 v_2} = 4$ км/с.)

Задача 6*. Камень свободно падает на Землю с высоты h, равной ее радиусу R. Сколько времени t будет происходить падение камня, и с какой скоростью v он достигнет поверхности Земли? Радиус Земли $R = 6400$ км, ускорение свободного падения у ее поверхности $g = 10$ м/с^2. (Ответ: $t = \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\sqrt{\frac{R}{g}} \approx 34$ мин; $v = \sqrt{gR} \approx 8$ км/с.)

Литература

1. *Белонучкин В. Е.* Законы Кеплера и школьная физика // Квант. – 1986. – № 2.– С. 49–51. – URL: http://kvant.mccme.ru/1986/02/zakony_keplera_i_shkolnaya_fiz.htm.

2. *Лишевский В.* Иоганн Кеплер // Квант. – 1978. – № 6. – С. 21–27.

Центр масс системы материальных точек. Теорема о движении центра масс

Вопросы, связанные с понятием «центр масс», входят в тематический блок «Законы сохранения в механике», на изучение которого отводится 10 ч. Считаем целесообразным данным вопросам уделить от 1 до 2 ч, дополняя теоретическое изложение разбором примеров решения задач. Начать при этом следует с определения положения центра масс, после чего рассмотреть вопросы о скорости движения центра масс и ее связи с импульсом механической системы, а закончить – формулировкой и доказательством теоремы о движении центра масс.

Центром масс системы материальных точек называют точку, радиус-вектор $\vec{r}_c$ которой определяется по формуле:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i, \tag{18}$$

где N – число материальных точек в системе, m_i – масса i-й точки, а $\vec{r}_i$ – ее радиус-вектор; $m = \sum_{i=1}^{N} m_i$ – суммарная масса системы.

Поскольку проекция радиуса-вектора $\vec{r}$ точки на координатную ось (например, OX) есть ни что иное, как координата x этой точки, то для координаты x_c центра масс имеем:

$$x_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i. \tag{19}$$

Пример 1. Три маленьких массивных шарика массами m, $2m$ и $3m$ расположены на одной прямой, как показано на рисунке 32. Расстояние L между соседними шариками известно. На каком расстоянии x_c от шарика m находится центр масс этой системы?

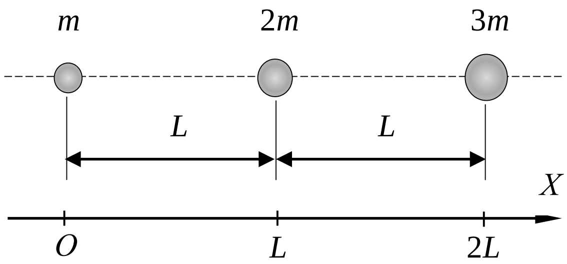


Рис. 32

Решение. Направим координатную ось OX параллельно прямой, вдоль которой расположены наши шарики, совместив начало координат с положением шарика m (рис. 32). Обозначим на этой оси координаты каждого из шариков. Тогда, на основании формулы (19), находим искомую величину:

$$x_с = \frac{m \cdot 0 + 2m \cdot L + 3m \cdot 2L}{m + 2m + 3m} = \frac{4}{3}L.$$

Если мы имеем дело не с системой материальных точек, а с протяженным телом, то его всегда можно мысленно разбить на очень маленькие части и, считая каждую из этих частей материальной точкой, воспользоваться вышеизложенным определением (18). Расчеты показывают, что центр масс геометрически правильных однородных тел находится в их центрах симметрии. Так, например, центр масс однородного стержня находится в середине стержня, центр масс однородного шара – в центре шара и т. д.

Следует иметь в виду, что центр масс и центр тяжести – это разные понятия, однако в однородном поле тяжести центр масс и центр тяжести совпадают. Полезно предложить обучающимся доказать этот факт, основываясь на определении центра масс и определении центра тяжести (которое необходимо предварительно аккуратно сформулировать).

Выразим теперь скорость $\vec{v}_с$ движения центра масс системы через скорости $\vec{v}_i$ движения материальных точек, входящих в рассматриваемую систему. Принимая во внимание, что скорость движения материальной точки равна производной по времени ее радиуса-вектора, и дифференцируя уравнение (18), приходим к искомому выражению:

$$\vec{v}_с = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i. \tag{20}$$

Но сумма в правой части данной формулы – это не что иное, как импульс всей системы $\vec{P}_{сист}$ (по определению он равен векторной сумме импульсов всех материальных точек, входящих в состав системы: $\vec{P}_{сист} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i$).

Таким образом, зная импульс системы материальных точек, можно найти скорость движения ее центра масс. И наоборот, зная скорость движения центра масс системы, нетрудно найти ее импульс:

$$\vec{P}_{сист} = m\vec{v}_с. \tag{21}$$

Следует подчеркнуть, что *импульс системы материальных точек равен произведению массы всей системы на скорость движения ее центра масс!*

Пример 2. Две свинцовые дробинки массами m_1 и m_2 движутся во взаимно перпендикулярных направлениях со скоростями v_1 и v_2 соответственно (рис. 33).

С какой скоростью и в каком направлении перемещается центр масс рассматриваемой системы?

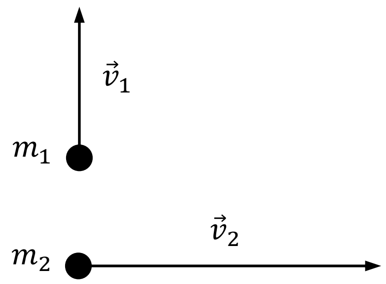


Рис. 33

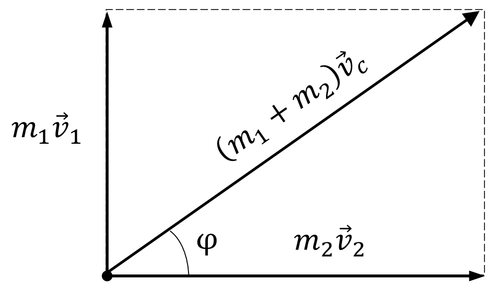


Рис. 34

Решение. Перепишем для нашего примера соотношение (20):

$$(m_1 + m_2)\vec{v}_c = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2.$$

Воспользуемся правилом параллелограмма при сложении векторов $m_1\vec{v}_1$ и $m_2\vec{v}_2$ (рис. 34). Тогда с помощью теоремы Пифагора можно вычислить модуль искомой скорости:

$$v_c = \frac{\sqrt{(m_1v_1)^2 + (m_2v_2)^2}}{m_1 + m_2}.$$

Заметим, что скорость $\vec{v}_\text{c}$ направлена под таким углом φ к направлению движения второй дробинки, что

$$\text{tg } \varphi = \frac{m_1v_1}{m_2v_2}.$$

Пример 3. Однородный шар массой m движется со скоростью $\vec{v}$, вращаясь при этом с угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через его центр (рис. 35). Найдите импульс $\vec{P}$ шара.

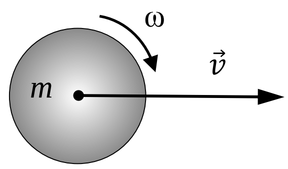


Рис. 35

Решение. Для нахождения искомого импульса надо знать массу шара m, скорость его центра $\vec{v}_\text{c}$ и воспользоваться формулой (21). Какова при этом будет угловая скорость ω вращения шара, не имеет никакого значения! Таким образом, имеем:

$$\vec{P} = m\vec{v}.$$

Можно предложить обучающимся объяснить, почему вращательное движение шара не дает никакого вклада в его импульс.

Переходим теперь к теореме о движении центра масс. Эта теорема утверждает, что *центр масс системы материальных точек движется как материальная точка, масса которой равна суммарной массе всей системы* m

($m = \sum_{i=1}^{N} m_i$), *под действием силы* $\vec{F}$, *равной равнодействующей всех внешних сил, приложенных к системе* ($\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$, где $\vec{F}_i$ – внешняя сила, действующая на материальную точку с номером i). Иными словами, ускорение центра масс системы в любой момент времени находится в соответствии со вторым законом Ньютона как отношение равнодействующей внешних сил $\vec{F}$ к массе системы m:

$$\vec{a}_{\text{c}} = \frac{\vec{F}}{m}. \tag{22}$$

Для доказательства данной теоремы продифференцируем по времени соотношение (20). Принимая во внимание, что производная скорости по времени есть ускорение, для ускорения движения центра масс системы имеем:

$$\vec{a}_{\text{c}} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i. \tag{23}$$

Заметим, что в соответствии со вторым законом Ньютона:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \cdots + \vec{F}_{iN}.$$

Здесь мы учли, что на материальную точку с номером i, кроме суммы $\vec{F}_i$ внешних сил, действуют и внутренние силы $\vec{F}_{ik}$ $(k \neq i)$ со стороны других материальных точек системы.

Подставляя последнее выражение в соотношение (23) и производя суммирование, замечаем, что внутренние силы сокращаются благодаря третьему закону Ньютона ($\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki} \ \rightarrow \ \vec{F}_{ik} + \vec{F}_{ki} = 0$!), а в числителе дроби остается только сумма внешних сил $\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$, что и доказывает нашу теорему.

Следует отметить, что изменить импульс центра масс системы (равно как и скорость его движения) могут только внешние силы. Внутренние силы, какой бы природы они ни были, никак не влияют на движение центра масс. Так, например, центр масс системы осколков, образовавшихся в результате разрыва снаряда, двигавшегося по баллистической траектории, продолжит свое движение по той же самой траектории, по которой двигался бы снаряд в отсутствие разрыва (разумеется, если нет сопротивления воздуха). Так будет продолжаться до тех пор, пока один из осколков не упадет на землю. После этого кроме силы тяжести на систему осколков начнет действовать сила реакции земной поверхности.

Пример 4. Шарик массой m, скользящий по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью v_0, заезжает на незакрепленную горку массой M, покоящуюся в начальный момент на этой поверхности (рис. 36). Шарик, не преодолев горку, съезжает с нее. Найдите время τ пребывания шарика на горке, если за это время горка смещается на расстояние S вдоль поверхности.

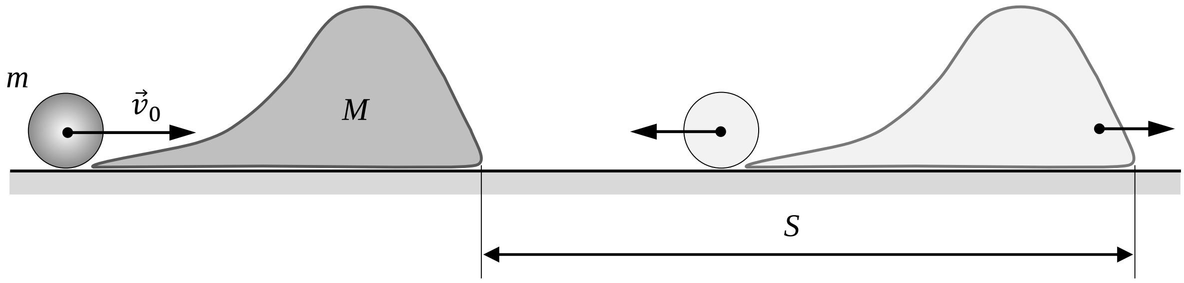


Рис. 36

Решение. Воспользуемся теоремой о движении центра масс. Поскольку в горизонтальном направлении на систему «шарик + горка» внешние силы не действуют (поверхность гладкая, т. е. трение о нее отсутствует), то центр масс системы в этом направлении движется с постоянной скоростью

$$v_c = \frac{mv_0}{m+M}$$

и за искомое время смещается на расстояние

$$S_c = v_c\tau = \frac{mv_0\tau}{m+M}.$$

Принимая во внимание, что взаимное расположение шарика и горки за время τ не меняется, приходим к выводу, что найденная величина S_c равна известному смещению S горки, т. е. $S_c = S$. С учетом этого:

$$\tau = \frac{S}{v_0}\cdot\left(1 + \frac{M}{m}\right).$$

В заключение рассмотрим пример задачи, которая изящно решается именно с помощью применения теоремы о движении центра масс.

Пример 5. Два маленьких одинаковых комка пластилина бросают одновременно навстречу друг другу с одинаковыми по модулю скоростями, как показано на рисунке 37. Первый комок бросают с поверхности земли, а второй – с высоты h = 10 м. Известно, что комки сталкиваются в воздухе. С какой скоростью v подлетит к земле комок пластилина, образовавшийся при абсолютно неупругом ударе двух первоначальных комков? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². Сопротивлением воздуха пренебречь.

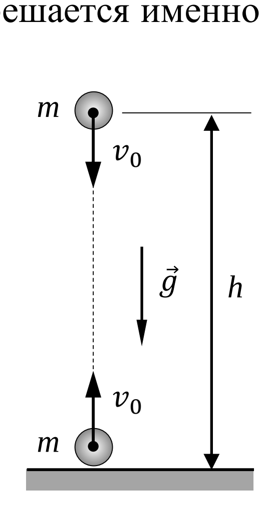


Рис. 37

Решение. Для начала отвлечемся от центра масс и теоремы о его движении. Заметим, что нам не дана начальная скорость движения каждого из комков, только подразумевается, что она такова, что столкновение происходит в воздухе. Если решать эту задачу «в лоб», то придется ввести эту начальную скорость v_0. Затем записать выражения для координат комков и, приравняв координаты, найти момент времени, когда произойдет удар. После чего найти высоту, на которой произойдет соударение, с помощью кинематических формул найти скорости перед ударом, а затем после него (по закону сохранения импульса), и лишь потом рассматривать полет образовавшегося комка с найденной высоты и с найденной начальной скоростью. Одним словом, предстоит проделать кропотливый путь…

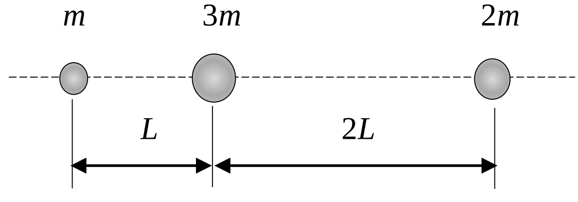
Всего этого можно избежать, если воспользоваться теоремой о движении центра масс, когда ответ можно получить практически «в уме». В самом деле, поскольку комки одинаковые, то в начальный момент центр масс системы находится на высоте $h_0 = h/2$. Кроме того, начальный импульс системы равен нулю, а следовательно, равна нулю и начальная скорость движения центра масс. При этом центр масс движется как тело массой $2m$ под действием силы $2mg$, т. е. имеет ускорение $a = g$. Движение центра масс, таким образом, представляет собой не что иное, как свободное падение. Скорость движения центра масс v при подлете к земле нетрудно найти либо по формулам кинематики, либо воспользовавшись законом сохранения энергии:

$$v = \sqrt{2gh_0} = \sqrt{gh} = 10 \text{ м/с}.$$

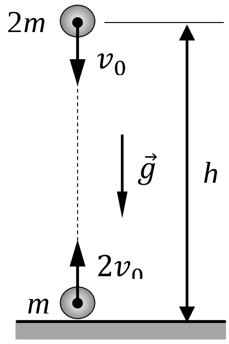
Отметим, что условие последнего примера можно легко варьировать, задавая разные массы комков, например m и $2m$, а также разные начальные скорости, например $3v_0$ и v_0. Это немаловажно при составлении проверочных и контрольных работ. В подобных случаях надо на основании вышеизложенного аккуратно найти начальную высоту h_0 расположения центра масс системы и его начальную скорость v_{c0}. Скорость комка при падении на землю в этом случае рассчитывается по формуле: $v = \sqrt{v_{c0}^2 + 2gh_0}$.

Домашнее задание

Задача 1. Три маленьких массивных шарика массами m, $3m$ и $2m$ расположены на одной прямой, как показано на рисунке. Расстояние L известно. На каком расстоянии x_c от шарика m находится центр масс этой системы? (Ответ: $x_c = \frac{3}{2}L$.)



Задача 2. Человек массой m переходит с одного конца доски, лежащей на гладкой горизонтальной поверхности льда, на другой ее конец. На какое расстояние S по льду сместится при этом доска, если ее масса M, а длина L? В начальный момент человек и доска покоились. Трением доски о лед пренебречь. (Ответ: $S = \frac{m}{m+M}L$.)



Задача 3. Два маленьких комка пластилина массами m и $2m$ бросают одновременно навстречу друг другу со скоростями $2v_0$ и v_0, как показано на рисунке. Первый комок бросают с поверхности земли, а второй – с высоты h = 7,5 м. Известно, что комки сталкиваются в воздухе. С какой скоростью v подлетит к земле комок пластилина, образовавшийся при абсолютно неупругом ударе двух первоначальных комков? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь. (Ответ: $v = \sqrt{\frac{4}{3}gh} = 10$ м/с.)

Задача 4*. Человек массой m переходит с носа на корму лодки, имеющей длину L и массу M. На какое расстояние S в итоге сместится лодка? Модуль силы сопротивления F, действующей на лодку со стороны воды, пропорционален модулю скорости лодки v ($F = kv$) и не зависит от места нахождения человека на ней. (Ответ: $S = 0$.)

Задача 5*. На дне маленькой запаянной пробирки, подвешенной на нити вертикально над столом, сидит муха, масса которой равна массе пробирки. Расстояние от дна пробирки до поверхности стола равно длине l пробирки. Нить пережигают, и за время падения пробирки муха перелетает со дна в самый верхний конец пробирки. Определите время t, по истечении которого нижний конец пробирки стукнется о стол. Ускорение свободного падения g. Сопротивлением воздуха движению пробирки пренебречь. (Ответ: $t = \sqrt{\frac{L}{g}}$.)

Литература

1. *Черноуцан А. И.* Что такое центр масс // Квант. – 1988. – № 3. – С. 39–41. – URL: http://kvant.mccme.ru/1988/03/chto_takoe_centr_mass.htm.

2. *Черноуцан А. И.* Задачи на центр масс // Квант. – 1996. – № 2. – С. 43–45. – URL: http://kvant.mccme.ru/1996/02/zadachi_na_centr_mass.htm.

3. *Корнеев В. Т.* Центр масс // Потенциал. – 2009. – № 2. – С. 14–20. – URL: https://edu-potential.ru/images/catalog/physics/Massa_center.pdf.

Момент импульса материальной точки. Сохранение момента импульса в центральных полях

Вопросы, связанные с понятием «момент импульса», входят в тематический блок «Законы сохранения в механике», на изучение которого отводится 10 ч. Считаем целесообразным данным вопросам уделить 1 ч. Изложение материала следует начать с определения момента импульса материальной точки. Затем следует обсудить, вследствие чего момент импульса может изменяться, и перейти к закону сохранения момента импульса, в частности при движении в центральном поле.

Строго говоря, векторная физическая величина «*момент импульса* $\vec{L}$ материальной точки относительно некоторой неподвижной точки O» вводится как векторное произведение радиуса-вектора $\vec{r}$ этой точки (проведенного из точки O) на ее импульс $\vec{p} = m\vec{v}$ (m – масса точки, $\vec{v}$ – ее скорость): $\vec{L} = [\vec{r},\ \vec{p}]$. Векторная физическая величина *«момент силы $\vec{M}$»* также строго вводится как векторное произведение радиуса-вектора $\vec{r}$ материальной точки на силу $\vec{F}$, действующую на нее: $\vec{M} = [\vec{r},\ \vec{F}]$. При этом моментом импульса L_z и моментом силы M_z относительно некоторой оси OZ, проходящей через точку O, называют проекции векторов $\vec{L}$ и $\vec{M}$ на эту ось соответственно. Величины L_z и M_z являются скалярными (более подробно – см. [6, гл. V] и [7, гл. 5]).

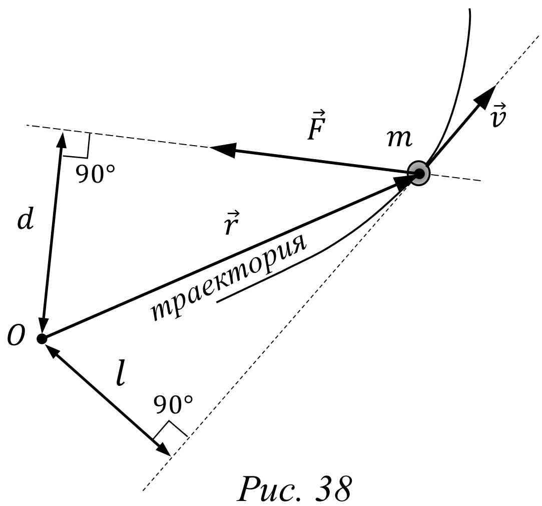


Рис. 38

Однако при первоначальном знакомстве с понятием «момент силы» относительно некоторой оси его вводят как произведение модуля силы F на ее плечо d. Напомним, что плечом силы называют кратчайшее расстояние от оси до линии действия силы (рис. 38). При этом момент силы представляется алгебраической величиной, т. е. моменты сил, стремящихся повернуть тело «по часовой стрелке» и «против часовой стрелки», отличаются знаками: $M = \pm F \cdot d$, где, по договоренности, знак «–» ставится, если сила стремится повернуть тело по часовой стрелке, а знак «+» – если против. Можно было бы договориться по знакам и «наоборот». Ведь речь идет фактически о проекции векторной величины $\vec{M}$ на ось, проходящую через точку O перпендикулярно плоскости рисунка. При этом знак «+» или «–» автоматически появится в зависимости от того, как мы направим ось: «на нас» или «от нас».

Аналогично поступают и с моментом импульса материальной точки относительно некоторой оси при первоначальном введении этого понятия, понимая под ним произведение модуля импульса $p = mv$ на «плечо» l (см. рис. 38), считая эту величину также алгебраической, т. е.:

$$L = \pm\, mv \cdot l,$$

где знаки «+» или «–» ставятся, как и в выражении для момента силы, по той же договоренности.

Подобно тому как изменение импульса тела происходит при действии на него результирующей (отличной от нуля) внешней силы, изменение момента импульса связано с наличием ненулевого результирующего момента внешних сил. Если результирующая внешняя сила, действующая на тело, равна нулю, то импульс тела при его движении не будет изменяться, т. е. будет сохраняться. Аналогично обстоит дело и с моментом импульса.

Момент импульса $\vec{L}$ тела относительно некоторой неподвижной точки O остается постоянным, если суммарный момент внешних сил $\vec{M}$ относительно этой точки равен нулю.

Данное утверждение, которое называется законом изменения момента импульса, справедливо и в том случае, если речь идет о моменте импульса относительно оси.

Момент импульса L_z тела относительно некоторой оси Z, проходящей через неподвижную точку O, остается постоянным, если суммарный момент внешних сил M_z относительно этой оси равен нулю.

Обратимся теперь к рассмотрению движения частицы (материальной точки) в так называемом «центральном поле», т. е. в таком силовом поле, в котором на частицу (при любом ее положении) со стороны этого поля действует сила, линия действия которой всегда проходит через одну и ту же точку, называемую силовым центром поля. Эта сила может быть как силой притяжения к силовому центру, так и силой отталкивания от него.

При движении частицы в центральном поле ее момент импульса относительно силового центра остается постоянным в силу того, что момент силы, действующей на частицу, равен нулю:

$$L = mvl = \text{const}.$$

В самом деле, где бы частица ни находилась, плечо d силы и, следовательно, ее момент M равняются нулю, поскольку линия действия силы всегда проходит через силовой центр O (рис. 39).

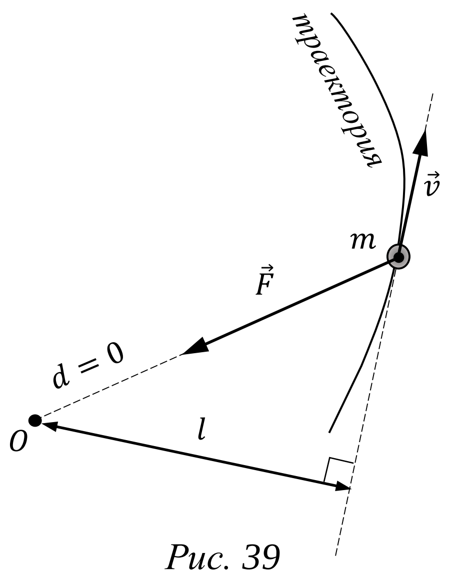


Рис. 39

Яркими примерами центральных полей являются, например, кулоновское поле точечного заряда и, конечно же, гравитационное поле однородного массивного шара.

Перейдем к примерам решения задач, рекомендуемым для разбора на уроке.

Пример 1. Маленький шарик массой m, привязанный к нити, продетой через отверстие O в гладком горизонтальном столе, движется равномерно со скоростью v_0 по окружности на расстоянии r_0 от отверстия (рис. 40). В некоторый момент нить начинают очень медленно вытягивать через отверстие. Какую скорость v будет иметь шарик в тот момент, когда он будет находиться на расстоянии r от отверстия? Какую работу при этом придется совершить, вытягивая нить?

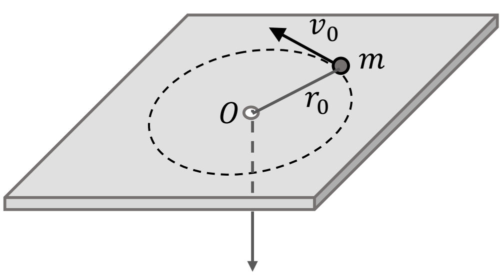


Рис. 40

Решение. Движение шарика фактически происходит в центральном поле переменной силы натяжения нити, силовой центр которого совпадает с отверстием O в столе (сила трения отсутствует, а сила тяжести, действующая на шарик, компенсируется силой нормальной реакции поверхности стола).

Таким образом, можно воспользоваться законом сохранения момента импульса, записать уравнение $mv_0r_0 = mvr$ и найти искомую скорость:

$$v = \frac{r_0}{r}v_0.$$

Совершаемую работу по вытягиванию нити нетрудно теперь найти при помощи теоремы о кинетической энергии:

$$A = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2}\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 - 1\right].$$

Пример 2. На очень большом расстоянии от Земли метеориты, летящие в параллельном потоке, имеют относительно Земли скорость v_0. При каких прицельных расстояниях d метеориты упадут на Землю? Радиус Земли R, ускорение свободного падения у поверхности Земли g. Сопротивление атмосферы не учитывать. Прицельным называют расстояние от центра Земли до прямой, по которой двигался бы метеорит в отсутствие земного тяготения.

Решение. Рассмотрим «критическую» ситуацию, когда траектория метеорита касается поверхности Земли (рис. 41), и найдем соответствующий прицельный параметр d_0.

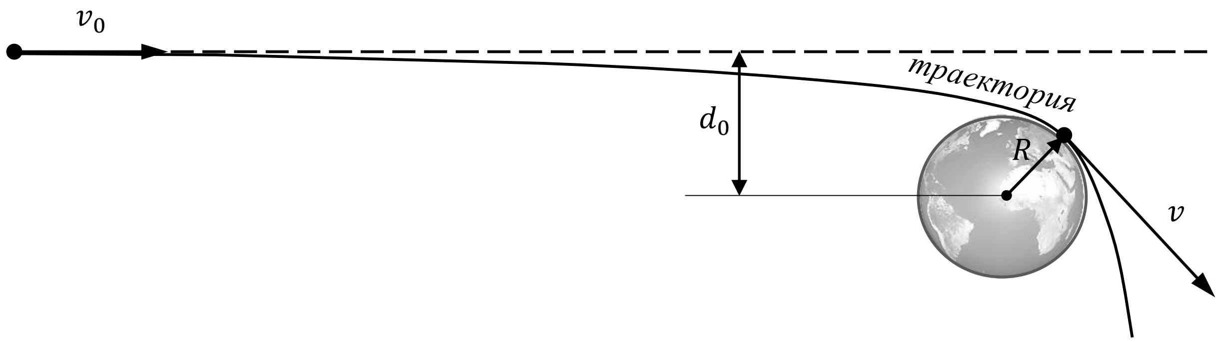


Рис. 41

При движении метеорита будет сохраняться его момент импульса относительно центра Земли, поскольку гравитационное поле Земли можно считать центральным. Также будет сохраняться полная механическая энергия метеорита, равная сумме его кинетической энергии и потенциальной энергии в поле земного тяготения. Таким образом, приходим к системе уравнений:

$$mv_0 d_0 = mvR, \qquad \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} - G\frac{mM}{R}.$$

Здесь $m -$ масса метеорита, $v -$ скорость метеорита в момент касания с Землей, $M -$ масса Земли, $G -$ гравитационная постоянная.

Принимая во внимание выражение для ускорения свободного падения у поверхности Земли $g = G\frac{M}{R^2}$, эту систему уравнений можно привести к виду:

$$v_0 d_0 = vR, \qquad v_0^2 = v^2 - 2gR.$$

Отсюда:

$$d_0 = \sqrt{1 + \frac{2gR}{v_0^2}} \cdot R.$$

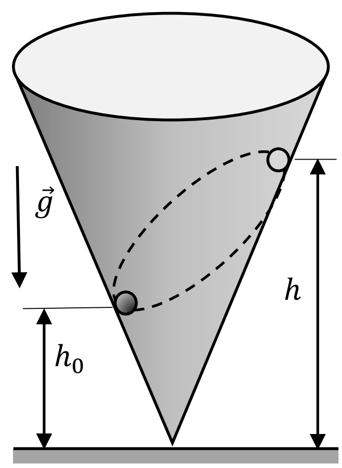
При $d < d_0$ метеориты упадут на Землю.

Домашнее задание

Задача 1. Маленький шарик массой m, прикрепленный к нити, продетой через отверстие O в гладком горизонтальном столе, движется равномерно со скоростью v_0 по окружности вокруг отверстия (см. рис. 40 к **примеру 1**). В некоторый момент нить начинают медленно «травить», выпуская через отверстие и увеличивая тем самым длину ее горизонтальной части на столе. Какую скорость v будет иметь шарик в тот момент, когда длина нити на столе увеличится на 20 %? (Ответ: $v = \frac{5}{6} v_0$.)

Задача 2. На очень большом расстоянии от планеты метеорит летел с прицельным расстоянием $d = 5R$ ($R -$ известный радиус планеты) с некоторой скоростью. Чему равна эта скорость v_0, если он пролетел на минимальном расстоянии от центра планеты, равном двум ее радиусам? Ускорение свободного падения у поверхности планеты g. Атмосфера у планеты отсутствует. (Ответ: $v_0 = \sqrt{\frac{gR}{6}}$.)

Задача 3*. По внутренней поверхности конической воронки, стоящей на столе вертикально, скользит без трения маленький шарик (см. рис.). В начальный момент шарик находился на высоте h_0 над столом, а его скорость v_0 была направлена горизонтально. Найдите v_0, если известно, что при дальнейшем движении шарик поднимается над столом до высоты h, а затем начинает опускаться. Найдите также скорость v шарика в указанном наивысшем положении. Ускорение свободного падения равно g.



(Ответ: $v_0 = \sqrt{\frac{2gh^2}{h + h_0}}$; $v = \sqrt{\frac{2gh_0^2}{h + h_0}}$.)

Литература

Сборник задач по общему курсу физики. В 5 кн. Кн. I: Механика / С. П. Стрелков и др.; под ред. И. А. Яковлева. – М.: Физматлит; Лань, 2006. – 240 с.

Уравнение Бернулли для идеальной жидкости

Уравнение Бернулли для идеальной жидкости рассматривается в тематическом блоке «Законы сохранения в механике». Жидкости и газы существенно отличаются друг от друга, это обусловлено большой сжимаемостью газов. Но при скоростях, значительно меньших скорости звука в газах, их движение тоже можно рассматривать как движение малосжимаемых жидкостей. Круг соответствующих явлений рассматривается в разделе физики, который называется «Гидроаэродинамика».

Учитывая ограниченность времени, изучению движения жидкости может быть отведено до 2 ч.

Следует сделать акцент на модели идеальной несжимаемой жидкости и ограничениям при ее применении.

Раздел физики о движении жидкостей и газов называется «Гидроаэродинамика». В рамках этого раздела жидкости и газы представляются как сплошные среды, т. е. их молекулярная структура не принимается во внимание. В наиболее простом случае рассмотрение ведется в рамках модели *идеальной жидкости* – это такая воображаемая жидкость, вязкость которой равна нулю, т. е. отсутствуют силы трения между элементами жидкости и между жидкостью и стенками сосуда[1]. Законы гидроаэродинамики являются следствиями законов сохранения (при определенных условиях – изменения) массы, импульса и механической энергии жидкости.

Пусть идеальная сжимаемая жидкость сначала течет с постоянной скоростью v_1 по трубе с площадью поперечного сечения S_1, а затем труба сужается, и площадь ее поперечного сечения становится равной S_1. При этом, поскольку жидкость сжимаемая, то при изменении сечения трубы плотность жидкости может изменяться – пусть она меняется от ρ_1 до ρ_2. Согласно закону сохранения массы, в единицу времени через поперечное сечение каждой трубы протекает одна и та же масса жидкости. Поэтому можно записать:

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2.$$

Это соотношение называется *уравнением неразрывности течения идеальной жидкости*.

---

[1] На самом деле в природе существует жидкость, при течении которой наблюдается явление сверхтекучести, т. е. отсутствия вязкости – это жидкий гелий при температурах, близких к абсолютному нулю.

Если жидкость несжимаемая, т. е. ее плотность постоянна ($\rho_1 = \rho_2$), то можно перейти к условию одинаковости объемов жидкости, протекающих в единицу времени через разные поперечные сечения трубы:

$$vS = \text{const}.$$

Для газов это условие можно приближенно применять при скорости течения газа, намного меньшей скорости звука в газе.

Предположим, что жидкость течет в некоторой трубе, площадь поперечного сечения которой изменяется плавно, и слои жидкости при течении не перемешиваются. Такое течение жидкости называется ламинарным (от лат. lāmina – пластинка). Для такого течения можно ввести понятия линии тока и трубки тока жидкости.

Линии тока – это линии, касательные к которым в каждой точке потока жидкости совпадают с вектором скорости воображаемой «частицы» жидкости, которая «находится» в рассматриваемой точке жидкости. Важно отметить, что линии тока не могут пересекаться друг с другом – в противном случае в точке пересечения линий тока соответствующая «частица» жидкости характеризовалась бы сразу двумя разными векторами скорости, что невозможно. Поэтому при ламинарном течении можно выделить некоторый замкнутый контур, через каждую точку которого проходят линии тока – в результате этого получится *трубка тока*. «Стенки» этой трубки будут образованы семейством линий тока, проходящих через выбранный контур. При ламинарном течении жидкости ее движение внутри трубки тока аналогично движению жидкости по настоящей трубе.

Стационарное течение – это такое течение жидкости, картина которого не меняется: трубки тока сохраняются неизменными, для каждой точки пространства, через которую течет жидкость, можно указать постоянную скорость, с которой эту точку проходят «частицы» жидкости.

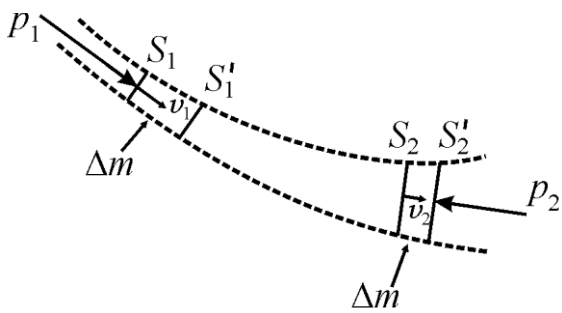


Рис. 42

Рассмотрим стационарное течение **сжимаемой** идеальной жидкости, текущей по трубке тока в однородном поле силы тяжести g «сверху вниз» (условно) – с уровня h_1 на уровень $h_2 < h_1$, причем на верхнем уровне давление жидкости равно p_1, а на нижнем уровне давление равно p_2. Пусть скорость жидкости в «верхнем» сечении S_1 трубки тока равна v_1, а в «нижнем» сечении S_2 трубки тока равна v_2 (рис. 42).

Пусть за малое время Δt жидкость, заключенная между сечениями S_1 и S_2, немного сместилась вдоль трубки тока (указанные сечения переместились в новые положения S_1' и S_2'). Работа, которую совершили силы давления при перемещении рассматриваемого объема жидкости, равна

$$A = p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t.$$

Поскольку жидкость идеальная, то, согласно закону изменения механической энергии, $A = \Delta E_к + \Delta E_п$, т. е. работа сил давления приводит к изменению механической энергии рассматриваемого объема жидкости.

Так как течение жидкости стационарное, то механическая энергия, запасенная в той части рассматриваемого объема, которая заключена между сечениями S_1' и S_2, не меняется. Поэтому изменение энергии рассматриваемого объема связано с тем, что малый элемент жидкости, заключенный между сечениями S_1 и S_1', «переместился», заняв место малого элемента, заключенного между сечениями S_2 и S_2'. При этом из стационарности течения жидкости следует, что масса этого элемента равна $\Delta m = \rho_1 S_1 v_1 \Delta t = \rho_2 S_2 v_2 \Delta t$.

Изменение потенциальной энергии рассматриваемого малого элемента жидкости равно

$$\Delta E_п = \Delta m g (h_2 - h_1) = g \Delta t (\rho_2 S_2 v_2 h_2 - \rho_1 S_1 v_1 h_1).$$

Приращение кинетической энергии этого элемента

$$\Delta E_к = \Delta m \left(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \right) = \frac{\Delta t}{2} (\rho_2 S_2 v_2^3 - \rho_1 S_1 v_1^3).$$

Эти уравнения можно переписать в следующем виде:

$$p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t = \frac{\Delta t}{2} (\rho_2 S_2 v_2^3 - \rho_1 S_1 v_1^3) + g \Delta t (\rho_2 S_2 v_2 h_2 - \rho_1 S_1 v_1 h_1)$$

или

$$p_1 S_1 v_1 \Delta t + \frac{\rho_1 \Delta t}{2} S_1 v_1^3 + \rho_1 g S_1 v_1 h_1 \Delta t = p_2 S_2 v_2 \Delta t + \frac{\rho_2 \Delta t}{2} S_2 v_2^3 + \rho_2 g S_2 v_2 h_2 \Delta t.$$

Используя записанное выше соотношение $\Delta m = \rho_1 S_1 v_1 \Delta t = \rho_2 S_2 v_2 \Delta t$, найдем:

$$\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{v_1^2}{2} + g h_1 = \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{v_2^2}{2} + g h_2.$$

В итоге получено *уравнение Бернулли*:

$$\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}+gh=\mathrm{const},$$

которое является следствием закона изменения механической энергии. Следует обратить внимание на следующие обстоятельства:

1) уравнение получено для стационарного ламинарного течения идеальной жидкости;

2) уравнение справедливо и для сжимаемой жидкости;

3) если жидкость несжимаемая, т. е. $\rho_1=\rho_2=\rho$, то уравнение можно переписать в следующем виде:

$$p+\frac{\rho v^2}{2}+\rho gh=\mathrm{const}',$$

причем константа в правой части уравнения одна и та же для всех линий тока в жидкости (это справедливо только для течения жидкости в отсутствие вихрей).

В полученном уравнении величина p называется статическим давлением, $\rho v^2/2$ – это динамическое давление (кинетическая энергия единицы объема движущейся жидкости), величину ρgh иногда называют весовым давлением (это потенциальная энергия единицы объема жидкости).

Рекомендуется рассмотреть на уроке примеры применения уравнения Бернулли в технике и использования этого уравнения для объяснения различных физических явлений. Для этого можно воспользоваться практически любым сборником качественных вопросов и задач по физике.

Также нужно обсудить со школьниками вопрос о том, как изменится уравнение Бернулли при течении жидкости по горизонтальной трубе. В этом случае нужно исключить потенциальную энергию элемента жидкости, и уравнение примет следующий вид:

$$p+\frac{\rho v^2}{2}=\mathrm{const}.$$

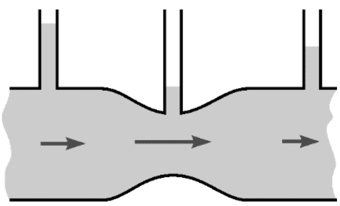


Рис. 43

Из него следует, что в участках трубы с меньшими сечениями, в которых жидкость течет быстрее, давление меньше, чем в широких участках, в которых течение медленное. Это можно обнаружить, наблюдая уровни жидкости в вертикальных манометрических трубках, которыми снабжена труба. В трубке, которая установлена на участке трубы с меньшим сечением, уровень оказывается ниже, чем в трубке, установленной на участке с бóльшим сечением (рис. 43).

Обратим внимание, что для точного и правильного формирования понятий, для понимания ограничений моделей рассматриваемых явлений, не следует пользоваться законами формально. Поэтому, рассматривая на уроке задачи, для решения которых необходимо применять уравнение Бернулли, необходимо внимательно проговорить, обсудить каждую деталь в условии задачи. При решении всех задач жидкость будем считать идеальной и несжимаемой, а ее течение – стационарным.

Пример 1. Определите разность давлений Δp в широком и в узком участках горизонтальной трубы (рис. 44). Диаметры поперечных сечений указанных участков трубы $d_1 = 9$ см и $d_2 = 6$ см. Течение воды по трубе стационарное, в широкой части вода течет со скоростью $v_1 = 6$ м/с. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3.

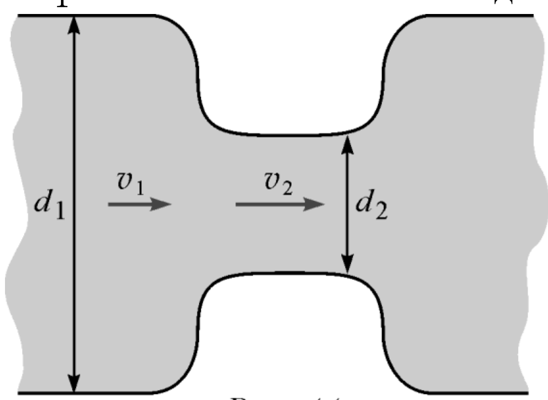


Рис. 44

Решение. Используем уравнение неразрывности несжимаемой жидкости:

$$v_1 \frac{\pi d_1^2}{4} = v_2 \frac{\pi d_2^2}{4}.$$

Отсюда $v_2 = v_1 \frac{d_1^2}{d_2^2}$.

Подставим выражение для скорости v_2 в уравнение Бернулли с учетом того, что труба горизонтальная:

$$p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_2 + \frac{\rho}{2}\left(v_1 \frac{d_1^2}{d_2^2}\right).$$

Отсюда

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{\rho v_1^2}{2}\left(\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 - 1\right) \approx 7{,}3 \cdot 10^4 \text{ Па}.$$

Пример 2. В неподвижный широкий сосуд налита жидкость до высоты h над дном сосуда. С какой скоростью будет вытекать жидкость через небольшое отверстие в стенке сосуда, проделанное у самого дна? Атмосферное давление равно p_0.

Решение. Поскольку отверстие небольшое, а сосуд широкий, уровень жидкости в сосуде опускается при ее вытекании очень медленно. Поэтому давление у дна сосуда остается практически неизменным, оно складывается из атмосферного давления и гидростатического давления жидкости:

$$p = p_0 + \rho g h.$$

Кинетической энергией тонкого верхнего слоя жидкости (динамическим давлением) также можно пренебречь. Поэтому уравнение Бернулли для рассматриваемого случая запишется так:

$$p_0 + \rho g h = p_0 + \frac{\rho v^2}{2}.$$

Отсюда получаем искомую скорость вытекания жидкости из отверстия:

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Это – *формула Торричелли* для скорости струи, вытекающей из сосуда. Истечение происходит с такой же скоростью, которую имело бы свободно падающее с высоты h тело.

Данный результат полностью соответствует закону сохранения механической энергии, поскольку давление над поверхностью жидкости и внешнее давление на вытекающую струю одинаковы (равны атмосферному давлению).

Подчеркнем разницу между рассмотрением поведения покоящейся жидкости (гидростатика) и движущейся жидкости (гидродинамика). Для этого зададим вопрос: какую реактивную силу будет создавать вытекающая из сосуда струя в условиях данной задачи? Казалось бы, силы давления жидкости на стенки сосуда (на уровне отверстия) уравновешены со всех сторон за исключением участка, расположенного точно напротив отверстия, из которого вытекает жидкость. И мы можем ошибочно предположить, что эта «неуравновешенная» сила, равная произведению гидростатического давления $\rho g h$ на площадь S отверстия, и создает реактивную силу, действующую на сосуд.

На самом деле это не так. При динамическом рассмотрении действующую на сосуд реактивную силу следует приравнять изменению за единицу времени импульса жидкости, унесенной из сосуда при вытекании струи: $F = \frac{\Delta P}{\Delta t}$ (здесь импульс обозначен большой буквой P, поскольку маленькая буква p уже «занята» для обозначения давления).

Пусть за малое время Δt из отверстия вытекает жидкость массой Δm. Тогда

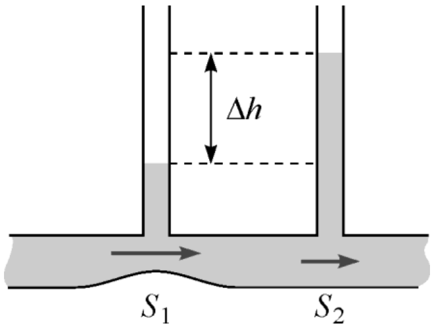
$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{\Delta m \cdot v}{\Delta t} = \frac{\rho S v \Delta t \cdot v}{\Delta t} = \rho S \sqrt{2gh} \cdot \sqrt{2gh} = 2\rho g h S,$$

т. е. в 2 раза больше, чем кажется на первый взгляд!

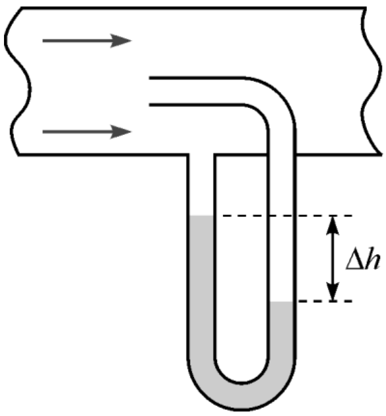
После решения этих задач полезно обсудить вопрос о том, чем реальная жидкость отличается от идеальной, и как это скажется на течении жидкости. Из-за ограниченности времени, на уроках этот вопрос детально обсудить вряд ли возможно. Но для любознательных школьников сравнение поведения реальной и идеальной жидкостей могло бы стать темой проектной исследовательской работы.

Дополнительно рекомендуется ознакомиться с материалом по данной теме, изложенным в пособии [8].

Домашнее задание



Задача 1. Две вертикальные манометрические трубки установлены на горизонтальной трубе переменного сечения в местах, где площади поперечного сечения трубы равны S_1 и S_2. По трубе течет вода плотностью ρ. Найдите объем воды, протекающий в единицу времени через сечение трубы, если разность уровней в манометрических трубках равна Δh. (Ответ: $Q = \rho S_1 S_2 \sqrt{\frac{2g\Delta h}{S_2^2 - S_1^2}}$.)



Задача 2. Трубка Пито – специальное измерительное приспособление – установлена на оси трубы газопровода, площадь внутреннего сечения которой равна S. Пренебрегая сжимаемостью газа, найдите объем газа, проходящего через сечение трубы в единицу времени, если разность уровней жидкости в манометре равна Δh, а плотности жидкости и газа равны соответственно ρ_0 и ρ. (Ответ: $Q = S\sqrt{\frac{2\rho_0 g\Delta h}{\rho}}$.)

Задача 3. На горизонтальном столе стоит широкий цилиндрический сосуд высотой $h = 50$ см, наполненный водой. Найдите, на какой высоте h_0 от дна сосуда следует сделать небольшое отверстие в стенке сосуда, чтобы струя из него била в поверхность стола на максимальном расстоянии от сосуда? Чему равно это максимальное расстояние $L_{\max}$? (Ответ: $h_0 = 25$ см; $L_{\max} = h$).

Литература

Белкин И. К. Закон Бернулли // Квант. – 1984. – № 5. – С. 33–34. – URL: http://kvant.mccme.ru/1984/05/zakon_bernulli.htm.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИЗУЧЕНИЮ ИЗБРАННЫХ ТЕМ РАЗДЕЛА «МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА»

Термодинамика. Тепловые машины

Теплоемкость тела. Молярная теплоемкость

Вопросы, связанные с понятиями «теплоемкость тела» и «молярная теплоемкость», входят в тематический блок «Термодинамика. Тепловые машины», на изучение которого отводится 20 ч. Данным вопросам целесообразно уделить от 2 до 4 ч, дополняя теоретическое изложение разбором примеров решения задач. Начать при этом следует с определения понятия теплоемкости тела, после чего рассмотреть вопрос о теплоемкости в различных процессах, установить связь между теплоемкостями при постоянном давлении и постоянном объеме, а закончить решением задач о нахождении теплоемкости в процессе различными методами (аналитическим и графическим). Ознакомиться на более глубоком уровне с теоретическим материалом, относящимся к разделу «Молекулярная физика и термодинамика», можно при помощи учебника [9].

Теплоемкостью $C_{\text{тела}}$ тела, находящегося в жидком, твердом или газообразном состоянии, называется отношение бесконечно малого количества теплоты δQ, полученного этим телом, к соответствующему изменению его температуры dT:

$$C_{\text{тела}} = \frac{\delta Q}{dT}.$$

Единицей измерения теплоемкости является Дж/К.

Наряду с понятием теплоемкости тела используется понятия *удельной теплоемкости* – теплоемкости единицы массы m вещества:

$$c = \frac{C_{\text{тела}}}{m} = \frac{1}{m}\frac{\delta Q}{dT},$$

которая измеряется в $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$.

Аналогичным образом вводится понятие *молярной теплоемкости* – теплоемкости единицы количества вещества ν:

$$C = \frac{C_{\text{тела}}}{\nu} = \frac{1}{\nu}\frac{\delta Q}{dT},$$

которая измеряется в $\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$.

Поскольку $\nu = m/\mu$, где μ – молярная масса вещества, то $C = \mu c$.

Необходимо подчеркнуть важную особенность понятия теплоемкости – эта величина не является функцией состояния. Теплоемкость характеризует процесс, в ходе которого тело из состояния с температурой T переходит в состояние с температурой $T + dT$. Поэтому, зная теплоемкость вещества в данном термодинамическом процессе, легко вычислить полученное (отданное) телом количество теплоты. Особенно просто это сделать в тех случаях, когда теплоемкость постоянна, но очень часто теплоемкость зависит от температуры и от объема тела.

Также следует отметить, что теплоемкость, в зависимости от процесса, может принимать любое значение: $-\infty < C < +\infty$. Отрицательная теплоемкость соответствует случаю, когда тело получает от внешнего источника некоторое количество теплоты ($\delta Q > 0$), но температура тела при этом уменьшается ($dT < 0$). Полезно предложить обучающимся придумать пример термодинамического процесса, в ходе которого вещество характеризуется отрицательной теплоемкостью.

Для решения задач часто используются формулы для молярной теплоемкости идеального газа в изохорическом и изобарическом процессах (так называемые теплоемкости при постоянном объеме C_V и постоянном давлении C_p). Связь между этими теплоемкостями устанавливается уравнением Майера:

$$C_p = C_V + R.$$

Пусть газ состоит из молекул, имеющих i степеней свободы (для одноатомного газа i = 3, для двухатомного – i = 5). Тогда

$$C_V = \frac{i}{2}R, \qquad C_p = C_V + R = \frac{i+2}{2}R,$$

где R – универсальная газовая постоянная.

При изотермическом процессе ($T = \text{const}$) к телу подводится теплота, но его температура не изменяется, следовательно, теплоемкость в этом процессе бесконечно велика: $C_T \to \pm\infty$. Если же тело участвует в процессе без теплообмена с окружающей средой (адиабатический процесс), то, согласно определению теплоемкости, $C_Q = 0$.

Как уже отмечалось, в некоторых процессах теплоемкость остается постоянной – такие процессы называют *политропическими*. Уравнение политропического процесса имеет вид: $pV^n = \text{const}$, где n – показатель политропы. Этот показатель равен $n = \frac{C - C_p}{C - C_V}$, где C – теплоемкость в данном процессе.

Перечисленные выше четыре изопроцесса, которые обычно изучают в курсе школьной физики, являются политропическими: в изохорическом процессе $V = \text{const}$ и $n = \pm\infty$; в изобарическом $p = \text{const}$ и $n = 0$; в изотермическом $n = 1$; в адиабатическом $n = \frac{C_p}{C_V} = \gamma$. Последняя величина называется показателем адиабаты. Из приведенных выше формул для C_p и C_V идеального газа следует, что $\gamma = \frac{i+2}{i}$. В частности, для воздуха, который преимущественно состоит из двухатомных молекул азота и кислорода, $i = 5$ и $\gamma = \frac{7}{5} = 1{,}4$.

Отметим, что, зная показатель политропы n и показатель адиабаты γ идеального газа, можно найти теплоемкость газа в данном процессе:

$$C = C_V \frac{n - \gamma}{n - 1}.$$

Рассмотрим примеры использование понятия теплоемкости идеального газа для решения задач.

Пример 1. Астронавты, исследуя газ в атмосфере открытой ими планеты, нагрели порцию этого газа массой $m = 200$ г на $\Delta T = 60$ К – первый раз при постоянном давлении, а во второй раз – при постоянном объеме. Оказалось, что в процессе нагревания при постоянном давлении требуется подвести к газу на $\Delta Q = 1$ кДж теплоты больше, чем в процессе нагревания при постоянном объеме. Найдите среднюю молярную массу исследуемого газа, считая его идеальным.

Решение. Данная задача часто вызывает затруднения у обучающихся, так как никакие характеристики рассматриваемого газа неизвестны. Однако, она достаточно просто решается с использованием уравнения Майера и первого начала термодинамики.

Воспользуемся определением молярной теплоемкости для определения количества теплоты, переданного порции газа (в количестве ν молей), в каждом из рассматриваемых случаев: $Q_p = C_p \nu \Delta T$ и $Q_V = C_V \nu \Delta T$.

Поэтому

$$\Delta Q = Q_p - Q_V = (C_p - C_V)\nu \Delta T = R\frac{m}{\mu}\Delta T.$$

Отсюда $\mu = \frac{mR\Delta T}{\Delta Q} \approx 0{,}1$ кг/моль.

Пример 2. Вычислите молярную теплоемкость одноатомного идеального газа в процессе 1–2, в котором давление p прямо пропорционально объему V.

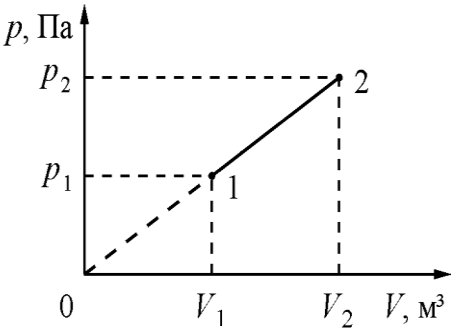


Рис. 45

Решение. Запишем уравнение заданного процесса: $p = \alpha V$, где α – некоторая положительная константа, и воспользуемся его графическим представлением (рис. 45). Будем считать, что $\nu = 1$ моль.

При сообщении газу некоторого количества теплоты происходит переход газа из равновесного состояния 1 в другое равновесное состояние 2. Воспользуемся первым началом термодинамики. Полученное газом количество теплоты частично пошло на изменение внутренней энергии газа и частично – на совершение газом работы против внешних сил:

$$\Delta Q = \Delta U + A = C_V(T_2 - T_1) + A,$$

где T_2 и T_1 – конечная и начальная температуры газа в этом процессе. Работа газа пропорциональна площади фигуры под графиком на pV-диаграмме:

$$A = \frac{(p_1 + p_2)(V_2 - V_1)}{2} = \frac{p_2V_2 - p_1V_1}{2} = \frac{R(T_2 - T_1)}{2} = \frac{1}{2}R\Delta T.$$

При упрощении этого выражения было использовано равенство $p_1V_2 = p_2V_1$, которое следует из того, что $p \sim V$. С учетом выражения для работы A, получаем:

$$\Delta Q = \left(C_V + \frac{R}{2}\right)(T_2 - T_1).$$

По определению молярной теплоемкости: $C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = C_V + \frac{R}{2}$ (напомним, что мы приняли $\nu = 1$ моль). Для одноатомного газа $C_V = \frac{3R}{2}$, поэтому $C = 2R$.

Этот ответ можно гораздо быстрее и проще получить, используя соотношение $C = C_V\frac{n - \gamma}{n - 1}$. Действительно, в данном случае $i = 3$ (газ одноатомный), поэтому $C_V = \frac{iR}{2} = \frac{3R}{2}$, показатель адиабаты $\gamma = \frac{i+2}{i} = \frac{5}{3}$, показатель политропы $n = -1$, откуда $C = 2$.

Пример 3. Один моль гелия расширяется в процессе, описываемом уравнением $p^2V = \mathrm{const}$, совершая при этом работу A. Температура газа в исходном состоянии равна T_1. Определите молярную теплоемкость C газа в этом процессе и конечную температуру газа T_2.

Решение. Преобразуем уравнение процесса, переписав его в виде: $pV^{1/2} = \mathrm{const}'$. Следовательно, процесс политропический, и показатель политропы равен $n = \frac{1}{2}$. С учетом того, что $C_V = \frac{3R}{2}$ и $\gamma = \frac{5}{3}$, применяя формулу, связывающую показатель политропы и теплоемкость в данном процессе, получим: $C = \frac{7}{2}R$.

Используем первое начало термодинамики: $\Delta Q = \Delta U + A$. Поскольку молярная теплоемкость в данном процессе постоянна, то $\Delta Q = C(T_2 - T_1)$. Поэтому $C(T_2 - T_1) = C_V(T_2 - T_1) + A$, откуда

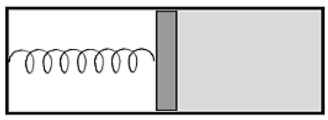
$$T_2 = T_1 + \frac{A}{C - C_V} = T_1 + \frac{A}{2R}.$$

Домашнее задание

Задача 1. В некотором тепловом процессе объем V одноатомного идеального газа зависит от абсолютной температуры T по закону $V = \alpha T^{-5/2}$, где α – известная постоянная величина. Найдите молярную теплоемкость газа в этом процессе. (Ответ: $C = -R$.)

Задача 2. Гелий в количестве ν молей сжимают в процессе с постоянной теплоемкостью. От газа отвели некоторое количество теплоты, и температура газа в результате увеличилась на ΔT. Оказалось, что количество отведенной от газа теплоты и изменение внутренней энергии газа равны по модулю. Определите молярную теплоемкость гелия в этом процессе. Чему равна работа, совершенная газом в этом процессе? (Ответ: $C = -\frac{3}{2}R$; $A =- 3\nu R\Delta T$.)

Задача 3*. Закрытый цилиндрический сосуд разделен на две части свободно перемещающимся поршнем, прикрепленным с помощью упругой пружины к левому торцу сосуда. В левой части сосуда – вакуум, в правой – идеальный одноатомный газ. Найдите молярную теплоемкость газа, находящегося в таких условиях. Недеформированное состояние пружины соответствует положению поршня у правого торца сосуда. (Ответ: $C = 2R$.)



Литература

1. *Шеронов А. А.* Теплоемкость идеального газа // Квант. – 1997. – № 2. – С. 45–46. – URL: http://kvant.mccme.ru/pdf/1997/02/kv0297sheronov.pdf.

2. *Зайцев И. А.* Уравнение газового состояния. Работа и теплоемкость газа // Квант. – 1973. – № 1. – С. 43–47. – URL: http://kvant.mccme.ru/1973/01/uravnenie_gazovogo_sostoyaniya.htm.

Второй закон термодинамики

Вопросам, связанным со вторым законом термодинамики для равновесных и неравновесных процессов, рекомендуется уделить 2 ч. Начать при этом следует с определения адиабатического процесса и вывода уравнения адиабаты для равновесного адиабатического процесса. После этого нужно обсудить различия между обратимыми и необратимыми процессами, уделив внимание качественным и количественным примерам. Закончить изложение материала целесообразно формулировкой второго закона термодинамики и обсуждением его физического смысла.

Процесс, происходящий в теплоизолированной системе, называют *адиабатическим* (или *адиабатным*). При адиабатическом процессе $\Delta Q = 0$ и поэтому, согласно первому закону термодинамики, изменение внутренней энергии системы происходит только за счет совершения внешними силами работы:

$$\Delta U = A_{\text{внеш сил}}.$$

Линия, соответствующая на каком-либо графике (например, на графике зависимости давления p от объема V) адиабатическому процессу, называется адиабатой. В качестве примера на pV-диаграмме показана адиабата для идеального газа (рис. 46). Адиабата обязательно идет круче изотермы. Ведь при адиабатическом процессе давление газа уменьшается не только за счет увеличения объема, как при изотермическом процессе, но и за счет уменьшения температуры газа.

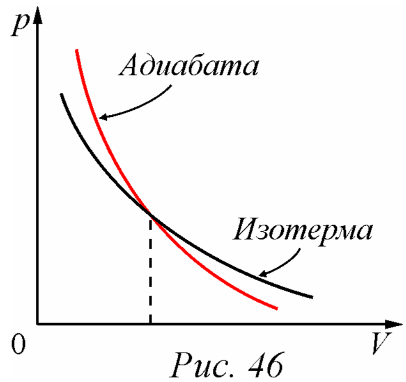


Рис. 46

Приведем вывод *уравнения адиабатического процесса* для идеального газа. Первый закон термодинамики в адиабатическом процессе, записанный для двух близких состояний, отличающихся по температуре и объему на малые величины dT и dV, имеет вид

$$\delta Q = dU + \delta A = C_V \nu dT + p dV = 0,$$

где C_V – молярная теплоемкость газа при постоянном объеме. Используя уравнение состояния идеального газа $pV = \nu RT$, имеем:

$$C_V \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} = 0.$$

Вспомним формулу для производной логарифмической функции, а также формулу для суммы логарифмов:

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}; \qquad \ln a + \ln b = \ln ab.$$

С учетом этих формул проинтегрируем полученное выше уравнение:

$$\ln(T^{C_V} V^R) = \text{const}.$$

Отсюда получаем $T^{C_V} V^R = \text{const}$, или, исключая T:

$$pV^{\frac{C_V+R}{C_V}} = pV^{\gamma} = \text{const}.$$

Коэффициент $\gamma = (C_V + R)/C_V = C_p/C_V$ называется показателем адиабаты. Видно, что адиабатический процесс является политропическим с показателем политропы, равным показателю адиабаты.

Пример 1. Идеальный одноатомный газ, занимающий при давлении p_1 объем V_1, начинает медленно адиабатически расширяться до объема V_2. Найдите работу A, совершенную газом в этом процессе.

Решение. Согласно первому закону термодинамики для адиабатического процесса $A = -\Delta U = -\frac{3}{2}\nu R \Delta T$, где $\Delta T = T_2 - T_1$. Из уравнения Менделеева–Клапейрона следует, что $T_1 = \frac{p_1 V_1}{\nu R}, T_2 = \frac{p_2 V_2}{\nu R}$.

Для одноатомного газа $\gamma = 5/3$. Запишем уравнение адиабаты для одноатомного газа: $p_1 V_1^{5/3} = p_2 V_2^{5/3}$, а значит, $p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{5/3}$. Подставляя данные соотношения в формулу для изменения внутренней энергии, получаем:

$$A = -\Delta U = -\frac{3}{2}\left(p_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{5/3} V_2 - p_1 V_1\right) = \frac{3}{2} p_1 V_1 \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{2/3}\right).$$

Первый закон термодинамики не устанавливает ограничений на возможные направления протекания термодинамических процессов. Однако, как показывает опыт, многие процессы принципиально могут протекать только в одном направлении. Такие процессы называются *необратимыми*. Например, при тепловом контакте двух тел с разной температурой тепловой поток всегда направлен от более нагретого тела к более холодному. Самопроизвольный процесс передачи количества теплоты от тела с низкой температурой к телу с более высокой температурой никогда не наблюдается. Следовательно, процесс теплообмена за конечное время при конечной разности температур между телами является необратимым.

Обратимыми называют процессы перехода системы из одного равновесного состояния в другое, которые можно провести в обратном направлении через ту же последовательность промежуточных равновесных состояний. При этом сама система и окружающие тела возвращаются к исходному состоянию. Процессы, в ходе которых система все время остается в состоянии равновесия, называются *квазистатическими*. Вообще говоря, не все квазистатические процессы обратимы, но все обратимые процессы должны происходить квазистатически.

Работа и подведенное количество теплоты существенно зависят от способов перевода системы из начального состояния в конечное. Более того, изобразить процесс наглядно, например в виде графика зависимости давления от объема системы, и вычислить работу по известным формулам (либо как величину, пропорциональную площади под графиком на p-диаграмме) возможно только для обратимых процессов.

Если рабочее тело тепловой машины приводится в контакт с тепловым резервуаром, температура которого в процессе теплообмена остается неизменной, то единственным обратимым процессом будет изотермический квазистатический процесс, протекающий при бесконечно малой разнице температур рабочего тела и резервуара.

При наличии двух тепловых резервуаров с разными температурами обратимым образом можно провести процессы на двух изотермических участках. Поскольку адиабатический процесс также можно проводить в обоих направлениях (адиабатическое сжатие и адиабатическое расширение), то циклический (замкнутый) процесс, состоящий из двух изотерм и двух адиабат (цикл Карно), является единственным обратимым круговым процессом, при котором рабочее тело приводится в тепловой контакт только с двумя тепловыми резервуарами.

Процессы превращения механической работы во внутреннюю энергию тела являются необратимыми из-за наличия трения, процессов диффузии в газах и жидкостях, процессов перемешивания газа при наличии начальной разности давлений и т. д. Все реальные процессы необратимы, но они могут сколь угодно приближаться к обратимым процессам, которые являются идеализацией реальных процессов.

Рассмотрим решение некоторых задач о необратимых процессах.

Пример 2. Спустя некоторое время после включения нагревателя в комнате установилась более высокая температура. Как изменилась внутренняя энергия воздуха, содержащегося в комнате? Вследствие негерметичности давление воздуха в комнате сохраняется равным наружному.

Решение. Для решения задачи будем считать, что начальное и конечное состояния воздуха в комнате равновесные, хотя сам процесс нагрева и не является обратимым. Внутренняя энергия воздуха, масса которого равна m, молярная масса μ и температура T, есть

$$U = C_V \frac{m}{\mu} T.$$

Уравнение состояния воздуха имеет вид:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT.$$

Если давление p и объем V воздуха в комнате не меняются, то очевидно, что сохраняется неизменным произведение массы воздуха на его температуру. А это, в свою очередь, означает, что внутренняя энергии воздуха, остающегося в комнате, постоянна и не зависит от его температуры. Понятно, что это происходит потому, что часть нагретого воздуха выходит из комнаты наружу.

Пример 3. В вертикально стоящем цилиндре под поршнем заперт идеальный газ. Наружное давление равно атмосферному p_0. Если на поршень поставить гирю, масса которой равна массе поршня, то через некоторое время объем, занимаемый газом, уменьшается в 1,5 раза. Какое начальное давление было в цилиндре? Стенки цилиндра проводят теплоту.

Решение. При скачкообразном (т. е. быстром) увеличении нагрузки процесс сжатия газа не будет квазистатическим, т. е. будет необратимым. Если трение поршня о стенки мало, то возникнут колебания поршня. Энергия этих колебаний будет постепенно уменьшаться – частично рассеиваться в виде теплоты, уходящей через стенки цилиндра, а частично передаваться молекулам наружного воздуха при их соударениях с поршнем.

В нашем случае понятно, что начальное и конечное состояния газа в цилиндре будут характеризоваться одной и той же температурой, однако сам процесс перехода не будет изотермическим. Не привлекая дополнительных условий, невозможно, например, найти работу, совершенную внешними силами над газом в цилиндре.

Пусть поршень из-за того, что у него есть масса, создает давление p_1. Для начального и конечного состояний имеем:

$$(p_0 + p_1)V_1 = (p_0 + 2p_1)V_2.$$

По условию $V_1 = 1{,}5V_2$. Отсюда находим, что $p_1 = p_0$. Таким образом, начальное давление в цилиндре было равно $2p_0$.

Второй закон термодинамики указывает направление протекания возможных энергетических превращений и тем самым выражает необратимость процессов в природе. Он был установлен путем непосредственного обобщения опытных фактов. Есть несколько формулировок второго закона термодинамики, которые, несмотря на внешнее различие, выражают в сущности одно и то же и поэтому равноценны. Немецкий ученый Р. Клаузиус сформулировал этот закон так: *невозможно перевести теплоту от более холодной системы к более горячей при отсутствии одновременных изменений в обеих системах или окружающих телах.*

Здесь констатируется опытный факт определенной направленности теплопередачи: теплота сама собой переходит всегда от горячих тел к холодным. Правда, в холодильных установках осуществляется теплопередача от холодного тела к более горячему, но эта передача связана с изменениями в других телах: дальнейшее охлаждение менее нагретого тела достигается за счет совершения работы внешними силами.

Другая формулировка второго закона термодинамики принадлежит английскому ученому У. Кельвину: *невозможно осуществить такой периодический процесс, единственным результатом которого было бы получение работы за счет теплоты, взятой от одного источника.*

Здесь утверждается, что невозможно осуществить такой циклический процесс, в ходе которого совершается работа за счет отбора теплоты от одного единственного тела (нагревателя) без передачи какого-либо количества теплоты другому телу (холодильнику). Можно сформулировать данное утверждение и иначе – невозможен тепловой двигатель, коэффициент полезного действия которого (КПД) равен 100%. Такой гипотетический двигатель называется «вечным двигателем второго рода». Если бы он существовал, то он бы действовал без нарушения закона сохранения энергии (как «вечный двигатель первого рода», который также неосуществим). Однако, как мы видим, существование вечного двигателя второго рода запрещается вторым законом термодинамики.

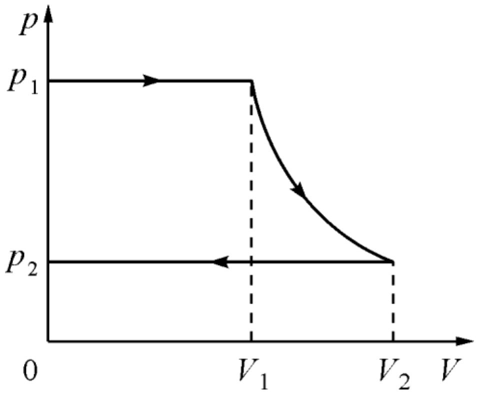
Можно доказать, что формулировки этого закона, данные Томсоном и Кельвином, являются эквивалентными.

Домашнее задание

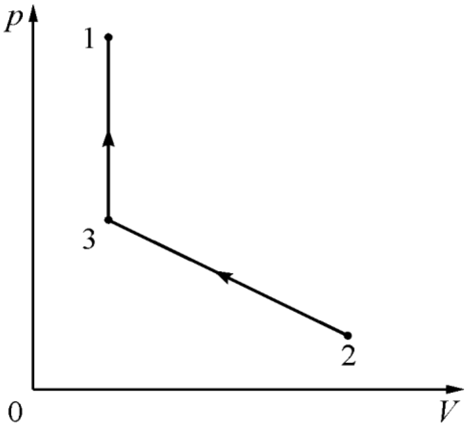
Задача 1. Какие из перечисленных ниже процессов являются необратимыми: 1) диффузия; 2) быстрое расширение газа в пустоту; 3) быстрое сжатие в адиабатической оболочке? (Ответ: все три процесса необратимы.)

Задача 2. Идеальный двухатомный газ подвергается медленному адиабатическому сжатию, в результате которого: а) объем газа уменьшается в $n = 10$ раз; б) давление газа возрастает в $n = 10$ раз по сравнению с первоначальным. Начальная температура газа в каждом из этих опытов равна $T_0 = 300$ К, Определите температуру газа T в конце каждого процесса. (Ответ: а) $T_1 \approx 754$ К; б) $T_1 \approx 579$ К.)

Задача 3. Модель пневматического молотка работает от резервуара со сжатым воздухом. Вначале воздух из резервуара с некоторым давлением p_1 и температурой T_1 заполняет часть объема V_1 рабочего цилиндра молотка (см. рис.). Затем эта порция воздуха совершает работу, адиабатически расширяясь до атмосферного давления p_2. В результате газ в цилиндре занимает больший объем V_2 и приобретает меньшую температуру T_2. На последнем этапе, при обратном ходе поршня, эта же порция воздуха вытесняется из рабочего цилиндра при постоянном давлении p_2 и температуре T_2. Затем цикл повторяется. Найдите работу, совершаемую за такой цикл молотком, если расход воздуха за каждый цикл равен одному молю, а разность температур T_1 и T_2 равна ΔT. (Ответ: $A = C_p \Delta T = \frac{7}{2} R \Delta T$.)



Задача 4. Один моль идеального одноатомного газа из начального состояния 1 с температурой $T_1 = 100$ К, расширяясь через турбину в пустой сосуд, совершает некоторую работу и переходит в состояние 2. Этот процесс происходит без подвода либо отвода теплоты. Затем газ сжимают в процессе 2–3 при линейной зависимости давления от объема и, наконец, по изохоре 3–1 возвращают в исходное состояние (см. рис.). Найдите работу, совершенную газом при расширении через турбину в процессе 1–2, если в процессах 2–3–1 к газу было подведено суммарное количество теплоты $Q = 72$ Дж. Известно, что $T_2 = T_3$ и $V_2 = 2V_1$. (Ответ: $A_{12} = \frac{9}{17} Q + \frac{12}{17} R T_1 \approx 625$ Дж.)



Задача 5*. Один моль гелия из начального состояния с температурой $T = 300$ К расширяется в адиабатическом процессе так, что относительные изменения давления $\Delta p/p$, объема $\Delta V/V$ и температуры газа $\Delta T/T$ малы. Найдите работу A, совершенную газом, если относительное изменение его давления $\Delta p/p = -1/120$. ($A = -\frac{3}{5}RT\frac{\Delta p}{p} \approx 12{,}5$ Дж.)

Литература

Шеронов А. Обратимые и необратимые процессы в термодинамике // Квант. – 1993. – № 5. – С. 73–78. – URL: http://kvant.mccme.ru/1993/05/obratimye_i_neobratimye_proces.htm.

Агрегатные состояния вещества. Фазовые переходы

Насыщенные и ненасыщенные пары

Вопросы, связанные с понятиями насыщенных и ненасыщенных паров, входят в тематический блок «Агрегатные состояния вещества. Фазовые переходы», на изучение которого отводится 14 ч. Считаем целесообразным данным вопросам уделить 2–3 ч, дополняя теоретическое изложение разбором примеров решения задач. Начать при этом следует с определений испарения, конденсации, насыщенного и ненасыщенного пара. После этого нужно рассмотреть зависимость давления насыщенного пара от температуры и изотермическое сжатие ненасыщенного пара, а завершить изложение учебного материала введением понятий абсолютной и относительной влажности, а также точки росы.

Любое вещество при определенных условиях может находиться в различных агрегатных состояниях – твердом, жидком и газообразном. Эти состояния часто называют фазами вещества. Однако, может оказаться, что данное вещество, находясь в твердом агрегатном состоянии, имеет при разных условиях различную внутреннюю структуру – разный тип кристаллической решетки. В этом случае говорят о наличии различных кристаллических модификаций твердого тела, и каждая такая модификация является отдельной фазой. Таким образом понятия «агрегатное состояние вещества» и «фаза вещества» не являются синонимами!

Переход вещества из одной фазы в другую называется фазовым переходом. Примерами фазовых переходов являются испарение и конденсация, плавление и кристаллизация, возгонка (переход вещества из твердого состояния сразу в газообразное) и обратная ей десублимация, а также превращение одной кристаллической модификации твердого тела в другую.

Все реальные газы (кислород, азот, водород и т. д.) при определенных условиях способны превращаться в жидкость. Однако такое превращение может происходить только при температурах ниже определенной, так называемой критической температуры $T_{\text{кр}}$. Например, для воды критическая температура равна 647,3 К, для азота – 126 К, для кислорода – 154,3 К. Если температура вещества превышает критическую температуру, то нельзя считать, что вещество находится в жидком или в газообразном состоянии – в этом случае говорят, что вещество находится в сверхкритическом состоянии.

Испарением называется фазовый переход из жидкого состояния в газообразное. С точки зрения молекулярно-кинетической теории испарение – это процесс, при котором с поверхности жидкости вылетают наиболее быстрые молекулы, кинетическая энергия которых превышает потенциальную энергию их взаимодействия с остальными молекулами жидкости. Вылет таких высокоэнергетических молекул приводит к уменьшению средней кинетической энергии оставшихся молекул, т. е. к охлаждению жидкости (если к жидкости не подводится теплота от окружающих тел).

Конденсация – это процесс, обратный процессу испарения. При конденсации молекулы пара возвращаются в жидкость. В закрытом сосуде жидкость и ее пар могут находиться в состоянии динамического равновесия друг с другом, когда число молекул, вылетающих в единицу времени из жидкости, в среднем равно числу молекул, возвращающихся в единицу времени в жидкость из пара, т. е. когда скорости процессов испарения и конденсации одинаковы. Такую систему называют двухфазной. Пар, находящийся в равновесии со своей жидкостью, называют *насыщенным*.

Среднее число молекул, вылетающих с единицы площади поверхности жидкости за одну секунду, зависит от температуры жидкости. Среднее число молекул, возвращающихся за одну секунду из пара в жидкость, зависит от концентрации молекул пара и от средней скорости их теплового движения, которая определяется температурой пара. Отсюда следует, что для данного вещества концентрация молекул пара при равновесии жидкости и ее пара определяется их равновесной температурой. Установление динамического равновесия между процессами испарения и конденсации при повышении температуры происходит при более высокой концентрации молекул пара. Так как давление газа (пара) определяется его концентрацией и температурой, то можно сделать вывод: давление пара данного вещества зависит только от его температуры и не зависит от объема.

При нагревании жидкости с паром в закрытом сосуде часть жидкости превращается в пар. С ростом температуры увеличивается скорость испарения, и равновесие между жидкостью и паром нарушается. Концентрация молекул, а следовательно, и плотность пара возрастают. Так продолжается до тех пор, пока плотность пара не увеличится настолько, что процесс конденсации уравновесит процесс испарения. В результате согласно основному уравнению молекулярно-кинетической теории ($p = nkT$) давление насыщенного пара растет не только вследствие повышения температуры, но и вследствие увеличения концентрации молекул (плотности) пара. При этом главную роль в увеличении давления насыщенного пара играет рост концентрации молекул пара, а не повышение его температуры.

Основное отличие в поведении идеального газа и насыщенного пара состоит в том, что при изменении температуры пара в закрытом сосуде (или при изменении объема пара при постоянной температуре) меняется масса пара. Жидкость частично превращается в пар или, напротив, пар частично конденсируется. С идеальным газом ничего подобного не происходит. Например, если начать нагревать насыщенный пар, находившийся в динамическом равновесии со своей жидкостью (состояние A на рис. 47, то сначала давление пара будет возрастать нелинейно (участок AB) из-за увеличения массы пара. Когда вся жидкость испарится, пар при дальнейшем нагревании перестанет быть насыщенным, и его давление при постоянном объеме будет возрастать прямо пропорционально абсолютной температуре в соответствии с законом Шарля (участок BC).

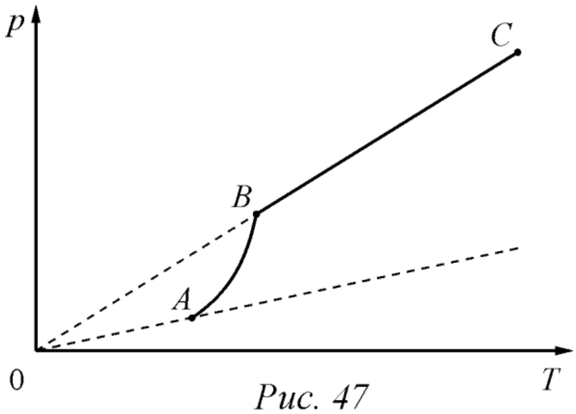


Рис. 47

Если медленно изотермически сжимать ненасыщенный пар при $T < T_{кр}$, то его давление будет возрастать (участок ab на рис. 48), пока не станет равным давлению насыщенного пара. При дальнейшем уменьшении объема на дне сосуда образуется жидкость, и при каждом положении поршня будет существовать динамическое равновесие между жидкостью и ее насыщенным паром. С уменьшением объема все бóльшая часть пара будет конденсироваться, а его давление при этом будет оставаться неизменным (горизонтальный участок bc на изотерме). Когда весь пар превратится в жидкость, давление начнет резко возрастать при дальнейшем уменьшении объема вследствие малой сжимаемости жидкости (участок cd).

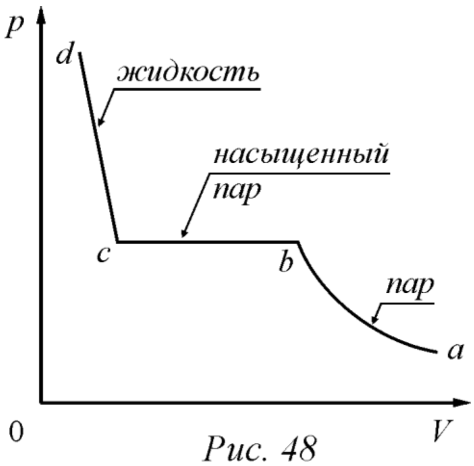


Рис. 48

Пример 1. В замкнутом сосуде объемом $V = 1$ м^3 находятся вода массой $m = 12$ г и насыщенный пар. Плотность и давление пара при данной температуре равны соответственно $\rho = 8 \cdot 10^{-3}$ кг/м^3 и $p = 1{,}1$ кПа. Какое давление установится при увеличении объема в $k = 5$ раз? Считайте, что температура при увеличении объема не изменяется.

Решение. В сосуде первоначально содержался насыщенный пар массой $m_1 = \rho V = 8 \cdot 10^{-3}$ кг (объемом, занимаемым водой, можно пренебречь). Общая масса воды и пара была равна $m + m_1 = 2 \cdot 10^{-2}$ кг. Для насыщения объема, равного kV, необходим пар массой $m_2 = \rho kV = km_1 = 4 \cdot 10^{-2}$кг. Так как $m + m_1 < m_2$, то после увеличения объема пар станет ненасыщенным. Его плотность будет равна $\rho_1 = \frac{m + m_1}{kV}$. Давление пара при данной температуре прямо пропорционально плотности. Поэтому

$$p_1 = \frac{p\rho_1}{\rho} = \frac{p(m + m_1)}{\rho kV} = 550 \text{ Па}.$$

Пример 2. В закрытом сосуде объемом $V_1 = 0{,}5$ м^3 находится вода массой $m = 0{,}5$ кг. Сосуд нагрели до температуры $t = 147$ °С. На какую величину ΔV следует изменить объем сосуда, чтобы в нем содержался только насыщенный пар? Давление насыщенного пара при температуре $t = 147$ °С равно $p_0 = 4{,}7 \cdot 10^5$ Па.

Решение. Насыщенный пар при давлении p_0 занимает объем

$$V = \frac{mRT}{p_0\mu} \approx 0{,}2 \text{ м}^3,$$

где $\mu = 0{,}018$ кг/моль – молярная масса воды. Объем сосуда $V_1 > V$, поэтому пар в исходном состоянии не является насыщенным. Чтобы пар стал насыщенным, объем сосуда следует изменить на

$$\Delta V = V - V_1 = -0{,}3 \text{ м}^3,$$

т. е. уменьшить на $0{,}3$ м^3.

Важной и часто используемой на практике характеристикой воздуха, содержащего водяные пары, является *влажность*. В качестве такой характеристики может быть принята плотность водяного пара ρ, содержащегося в воздухе. Эту величину называют *абсолютной влажностью* и из-за ее малости выражают в граммах на кубический метр. Абсолютная влажность, таким образом, показывает, сколько граммов водяного пара содержится в 1 м^3 воздуха. Поскольку в соответствии с уравнением Менделеева–Клапейрона плотность водяного пара прямо пропорциональна его давлению, то иногда абсолютной влажностью называют парциальное давление содержащегося в воздухе пара – при таком подходе абсолютную влажность можно измерять в кПа.

Относительной влажностью воздуха φ называют выраженное в процентах отношение парциального давления p водяного пара, содержащегося в воздухе при данной температуре, к давлению $p_н$ насыщенного пара при той же температуре:

$$\varphi = \frac{p}{p_н} \cdot 100\% = \frac{\rho}{\rho_н} \cdot 100\%.$$

Здесь ρ – абсолютная влажность, а $\rho_н$ — плотность насыщенного водяного пара при данной температуре.

При охлаждении влажного воздуха при постоянном давлении его относительная влажность повышается, так как чем ниже температура, тем ближе парциальное давление пара в воздухе к давлению насыщенного пара. В конце концов при некоторой температуре пар становится насыщенным.

Пусть при температуре t_1 парциальное давление водяного пара равно p_1. Состояние пара при этом изобразится на графике точкой A (рис. 49). Если охладить воздух до температуры t_r при $p_1 = \text{const}$, то пар станет насыщенным и его состояние изобразится точкой B. Температура t_r, до которой должен охладиться воздух, чтобы находящийся в нем водяной пар достиг состояния насыщения (при данной влажности воздуха и неизменном давлении), называется *точкой росы*.

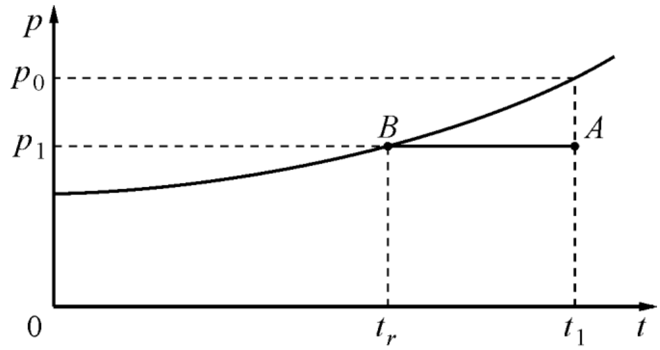


Рис. 49

Пример 3. В сосуде находится воздух, относительная влажность которого при температуре $t_1 = 10$ °C равна $\varphi_1 = 60$ %. Какой будет относительная влажность φ_2 после уменьшения объема сосуда в $n = 3$ раза и нагревания системы до температуры $t_2 = 100$ °C? Плотность насыщенных водяных паров при температуре t_1 равна $\rho = 9{,}4 \cdot 10^{-3}$ кг/м³.

Решение. При температуре t_1 абсолютная влажность (до сжатия) равна $\rho_1 = \varphi_1 \rho$. После сжатия масса влаги, приходящаяся на единицу объема сосуда (не только в виде паров, но и в виде сконденсировавшейся жидкости, если возникли условия для конденсации), будет равна

$$\rho_2 = n\varphi_1\rho \approx 1{,}69\cdot 10^{-2} \text{ кг/м}^3.$$

При температуре $T_2 = t_2 + 273\,°\text{C} = 373$ К давление насыщенных водяных паров равно нормальному атмосферному давлению $p_0 = 10^5$ Па, и их плотность

$$\rho_3 = \frac{\mu p_0}{RT_2} \approx 0{,}58\frac{\text{кг}}{\text{м}^3},$$

где $\mu = 0{,}018$ кг/моль. Так как $\rho_3 > \rho_2$, то в сосуде будет ненасыщенный пар с относительной влажностью

$$\varphi = \frac{\rho_2}{\rho_3} = \frac{n\varphi_1\rho RT_2}{\mu p_0} \approx 2{,}9\cdot 10^{-2} = 2{,}9\%.$$

Пример 4. При какой максимальной относительной влажности φ_0 воздуха в комнате бутылка молока, вынутая из холодильника, не будет запотевать? Температура в холодильнике $t_1 = +5\,°\text{C}$, а в комнате $t_2 = +25\,°\text{C}$. Давление насыщенных паров воды при $+5\,°\text{C}$ равно $p_1 = 866$ Па, а при +25 °С оно равно $p_2 = 3192$ Па.

Решение. Возле бутылки температура влажного воздуха становится равной $t_1 = +5\,°\text{C}$. Бутылка не запотевает, если относительная влажность воздуха при этой температуре не превышает 100%:

$$\varphi = \frac{\rho}{\rho_1}\cdot 100\% \le 100\%.$$

Здесь $\rho_1 = \frac{\mu p_1}{RT_1}$ – плотность насыщенного водяного пара при температуре $T_1 = t_1 + 273\,°\text{C} = 278$ К, а ρ – абсолютная влажность воздуха в комнате, не зависящая от температуры. Поэтому максимальная абсолютная влажность воздуха, при которой бутылка еще не запотевает, равна $\rho_0 = \rho_1 = \frac{\mu p_1}{RT_1}$. Соответствующая относительная влажность воздуха при температуре $T_2 = t_2 + 273\,°\text{C} = 298$ К будет равна $\varphi_0 = \frac{\rho_0}{\rho_2}\cdot 100\% = \frac{p_1T_2}{p_2T_1}\cdot 100\% \approx 29\%$.

Домашнее задание

Задача 1. В закрытом сосуде объемом *V* = 1 л находятся воздух и водяной пар при температуре 100 °С. Относительная влажность воздуха $\varphi = 25\%$. Какая масса водяного пара сконденсируется, если объем изотермически уменьшить в $n = 5$ раз? Считайте известными нормальное атмосферное давление p_0 и молярную массу воды μ. (Ответ: $\Delta m \approx \frac{\mu p_0 V}{RT}\left(\frac{\varphi}{100\%} - \frac{1}{n}\right) \approx 0{,}03$ г.)

Задача 2. Цилиндр заполнили небольшим количеством воды при температуре $t = 50$ ℃, закрыли плотно поршнем площадью $S = 10$ см^2 и перевернули. При какой минимальной массе поршня m он начнет опускаться вниз под действием силы тяжести? Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, давление насыщенного водяного пара при $t = 50$ ℃ равно $p = 12303$ Па. Трением пренебречь. Масса воды мала по сравнению с массой поршня. (Ответ: $m = 8{,}9$ кг.)

Задача 3. В здание зимой необходимо подать через систему кондиционирования $100\,000$ м^3 воздуха так, чтобы он имел температуру 20 °С и относительную влажность 70%. Воздух забирают с улицы, где он имеет температуру –5 °С и относительную влажность 90%. Давление насыщенных водяных паров при –5°С равно 400 Па, а при +20 °С оно равно 2,33 кПа. Сколько воды надо дополнительно испарить в данный объем подаваемого воздуха? (Ответ: $m = 916$ кг.)

Задача 4. В сосуде находится ненасыщенный пар. В процессе его изотермического сжатия объем, занимаемый паром, уменьшается в β = 4 раза, а давление в сосуде возрастает в α = 3 раза. Найдите долю пара, которая сконденсировалась в этом процессе. (Ответ: $1 - \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{4}$.)

Литература

1. *Константинов И.* Насыщенный пар // Квант. – 1977. – № 6. – С. 67–70. – URL: http://kvant.mccme.ru/1977/06/nasyshchennyj_par.htm.

2. *Асламазов Л.* Свойства паров, испарение и кипение жидкостей // Квант. – 1974. – № 1. – С. 60–66. – URL: http://kvant.mccme.ru/1974/01/svojstva_parov_isparenie_i_kip.htm

3. *Соловьянюк В.* Ах, уж эта влажность // Квант. – 1992. – № 11. – С. 35–37. – URL: http://kvant.mccme.ru/1992/11/ah_uzh_eta_vlazhnost.htm.

Поверхностное натяжение

Вопросы, связанные с понятием «поверхностное натяжение», рассматриваются в тематическом блоке «Агрегатные состояния вещества. Фазовые переходы», на изучение которого отводится 14 ч. Считаем целесообразным рассмотрению данных вопросов уделить 1 ч, дополняя теоретическое изложение разбором примеров решения задач. Начать при этом следует с качественного объяснения причин возникновения поверхностного натяжения, после чего нужно рассмотреть вопрос о дополнительной потенциальной энергии молекул поверхностного слоя и дать определение коэффициента поверхностного натяжения. Завершить рассмотрение необходимо выводом формулы для силы поверхностного натяжения.

Свободная поверхность жидкости обладает интересными свойствами. Дело в том, что молекулы, находящиеся в пограничном слое жидкости, в отличие от молекул, находящихся в глубине жидкости, окружены другими молекулами той же жидкости не со всех сторон. Силы межмолекулярного взаимодействия, действующие на одну из молекул внутри жидкости со стороны соседних молекул, в среднем взаимно скомпенсированы. Любая молекула в пограничном слое притягивается молекулами, находящимися внутри жидкости (силами, действующими на данную молекулу жидкости со стороны молекул газа или пара, можно пренебречь). В результате, казалось бы, должна появляться некоторая не скомпенсированная сила, действующая на молекулы поверхностного слоя и направленная вглубь жидкости.

Но на самом деле все молекулы, в том числе и молекулы пограничного слоя, находятся в состоянии равновесия (вообще говоря, динамического, так как молекулы участвуют в тепловом движении). Поэтому упомянутая выше сила в результате оказывается скомпенсированной. «Верхние» молекулы отталкиваются от ближайших к ним молекул, находящихся в нижележащем приповерхностном слое, а к лежащим еще глубже молекулам – притягиваются. Это приводит к «растяжению» равновесного поверхностного слоя жидкости, в котором молекулы оказываются упакованными менее плотно по сравнению с молекулами, находящимися в глубине жидкости (приповерхностный слой молекул оказывается более «рыхлым», чем нижележащие слои). По этой причине для перемещения молекулы из объема жидкости на ее поверхность надо совершать работу против сил притяжения к другим молекулам, находящимся в более глубоких слоях.

Следовательно, молекулы поверхностного слоя обладают некоторой дополнительной потенциальной энергией по сравнению с молекулами, находящимися внутри жидкости. Эту энергию часто называют поверхностной энергией.

Чтобы переместить некоторое число молекул из глубины жидкости на поверхность (т. е. увеличить площадь свободной поверхности жидкости), внешние силы должны совершить положительную работу $\Delta A_{\text{внеш}}$, пропорциональную изменению площади поверхности ΔS. Эта работа как раз и идет на увеличение потенциальной энергии молекул поверхностного слоя.

По определению *коэффициентом поверхностного натяжения* σ *жидкости* называется величина, численно равная работе, которую нужно совершить квазистатически (очень медленно) и изотермически для того, чтобы увеличить площадь свободной поверхности жидкости на единицу:

$$\sigma = \frac{\Delta A_{\text{внеш}}}{\Delta S}.$$

Единицей измерения коэффициента поверхностного натяжения в СИ является Дж/м^2 = Н/м.

Таким образом, дополнительная потенциальная энергия молекул поверхностного слоя жидкости пропорциональна площади свободной поверхности. Из механики известно, что равновесным состояниям системы соответствует минимальное значение ее потенциальной энергии. Отсюда следует, что свободная поверхность жидкости стремится сократить свою площадь. По этой причине свободная капля жидкости принимает форму, близкую к шарообразной (сферичность нарушается из-за действия силы тяжести).

Пример 1. Сферическую каплю ртути радиусом R разделили на две одинаковые капли. Какую работу совершили при этом внешние силы? Поверхностное натяжение ртути σ.

Решение. Пусть радиусы маленьких капель, полученных в результате разделения, равны r. Искомая работа равна увеличению поверхностной энергии жидкости: $A = \sigma(S_2 - S_1)$. Здесь $S_1 = 4\pi R^2$ и $S_2 = 2 \cdot 4\pi r^2$ – площади поверхностей большой и малых капель. Т.к. суммарный объем капель не изменился, то $\frac{4}{3}\pi R^3 = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$. Следовательно $r = \frac{R}{\sqrt[3]{2}}$ и

$$A = \sigma(2 \cdot 4\pi r^2 - 4\pi R^2) = 4\pi\sigma\left(\sqrt[3]{2} - 1\right)R^2.$$

Как уже отмечалось, жидкость стремится уменьшить площадь своей свободной поверхности. Жидкость ведет себя так, как будто по касательной к ее поверхности действуют силы, стягивающие эту поверхность. Эти силы называются *силами поверхностного натяжения*. Получим формулу для силы поверхностного натяжения $F_н$ на примере проволочной рамки с пленкой жидкости. Если в мыльный раствор опустить проволочную рамку, одна из сторон которой подвижна, то на ней образуется пленка жидкости (рис. 50).

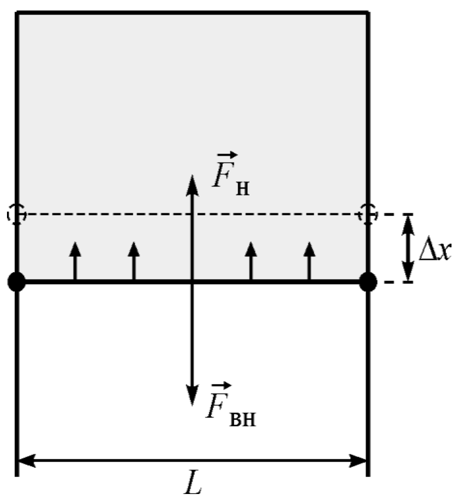


Рис. 50

Силы поверхностного натяжения стремятся сократить поверхность пленки. Для обеспечения равновесия подвижной стороны рамки длиной L к ней нужно приложить внешнюю силу $F_{вн} = 2F_н$ (коэффициент 2 в формуле появился из-за того, что у пленки есть *две* поверхности, и вдоль каждой действует сила поверхностного натяжения). Если подвижная сторона рамки бесконечно медленно переместится на расстояние Δx под действием этой внешней силы, то она совершит работу $\Delta A_{внеш} = F_{вн}\Delta x = 2F_н\Delta x = \sigma\Delta S$, где $\Delta S = 2L\Delta x$, изменение площади свободной поверхности обеих сторон мыльной пленки. Отсюда получаем:

$$F_н = \sigma L.$$

В общем случае $\Delta F_н = \sigma\Delta l$, где Δl – длина малого элемента некоторой линии, лежащей на поверхности жидкости. Сила $\Delta F_н$ направлена перпендикулярно этому элементу Δl и действует по касательной к поверхности.

Пример 2. Смачиваемый водой кубик плавает на поверхности воды так, что его верхняя грань горизонтальна. Ребро кубика имеет длину $a = 0{,}03$ м. На какую максимальную величину может возрасти глубина погружения кубика в воду из-за действия сил поверхностного натяжения? Коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma = 0{,}072$ Н/м, ее плотность 1 г/см^3.

Решение. Пусть x_1 – погружения кубика массой m в отсутствие сил поверхностного натяжения. Тогда Архимедова сила уравновешивает силу тяжести кубика:

$$a^2 x_1 \rho g - mg = 0.$$

Силы поверхностного натяжения действуют вдоль периметра горизонтального сечения кубика. Глубина погружения кубика возрастет на максимальную величину в том случае, если силы поверхностного натяжения будут сонаправлены с силой тяжести. Тогда условие равновесия для кубика, погруженного на глубину x_2, будет иметь вид:

$$a^2 x_2 \rho g - mg - 4a\sigma = 0.$$

Вычитая из второго уравнения первое, получим:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{4\sigma}{\rho g a} \approx 1 \text{ мм}.$$

Домашнее задание

Задача 1. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы выдуть мыльный пузырь диаметром 10 см? Коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора считать равным $4 \cdot 10^{-2}$ Н/м. (Ответ: $A = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ мДж.)

Задача 2. Предположим, что восемь маленьких дождевых капель, каждая радиусом R, во время падения на землю слились в одну большую каплю. Какую работу при этом совершили силы поверхностного натяжения? Коэффициент поверхностного натяжения воды равен σ. (Ответ: $A = 16\pi R^2 \sigma$.)

Задача 3. Оцените, какую минимальную вертикально направленную силу F нужно приложить для того, чтобы оторвать тонкое металлическое кольцо от горизонтальной поверхности мыльного раствора с коэффициентом поверхностного натяжения $\sigma = 4 \cdot 10^{-2}$Н/м, если диаметр кольца 15,6 см, а его масса 7,0 г. Кольцо соприкасается с поверхностью раствора по окружности, сила F распределена вдоль кольца равномерно. (Ответ: $F = 0{,}11$ Н.)

Задача 4. Для экспериментального определения коэффициента поверхностного натяжения воды была использована пипетка с диаметром выходного отверстия $d = 2$ мм. Вода свободно капала из пипетки, и после завершения опыта оказалось, что 40 одинаковых капель воды имеют общую массу $m = 1{,}9$ г. Определите по этим данным коэффициент поверхностного натяжения воды σ. (Ответ: $\sigma = 0{,}074$ Н/м.)

Литература

Белкин И. К. О силах поверхностного натяжения // Квант. – 1983. – № 12. – С. 27–28. – URL: http://kvant.mccme.ru/1983/12/o_silah_poverhnostnogo_natyazh.htm.

Давление под искривленной поверхностью жидкости. Капиллярные явления

Рассмотрению капиллярных явлений и давления под искривленной поверхностью жидкости рекомендуется уделить 1–2 ч. Начать при этом следует с обсуждения вопроса о причине появления избыточного давления при искривлении поверхности. После этого нужно рассмотреть явления смачивания и несмачивания, а завершить изучение выводом формулы для высоты поднятия жидкости в капилляре.

Под действием сил поверхностного натяжения в каплях жидкости, внутри мыльных пузырей и вообще под искривленной поверхностью жидкости возникает *избыточное давление* Δp. Найдем это избыточное давление, рассмотрев в качестве примера сферическую каплю радиусом R. Мысленно разрежем ее на две половины. На каждую из них действуют силы поверхностного натяжения $\vec{F}_н$, приложенные к границе разреза длиной $2\pi R$. При этом половина капли находится в равновесии. Следовательно, силы поверхностного натяжения уравновешиваются силой избыточного давления $\vec{F}_{давл}$, действующей на площадь поперечного сечения капли, равную πR^2 (рис. 51). Условие равновесия половины капли записывается в виде:

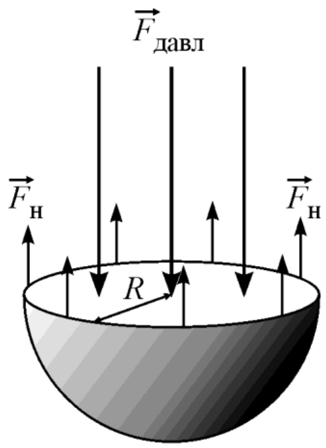


Рис. 51

$$\Delta p \cdot \pi R^2 = \sigma \cdot 2\pi R.$$

Отсюда избыточное давление внутри капли равно: $\Delta p = \frac{2\sigma}{R}$.

Избыточное давление внутри мыльного пузыря в два раза больше, чем внутри капли, так как пленка имеет две свободные поверхности (внешнюю и внутреннюю). Поэтому для мыльного пузыря $\Delta p = \frac{4\sigma}{R}$.

Если искривленная поверхность жидкости цилиндрическая (радиус цилиндра R), то избыточное давление под ней равно $\Delta p = \frac{\sigma}{R}$.

Применение этих простых формул позволяет решать ряд задач.

Пример 1. Два мыльных пузыря радиусами R и r «срослись» друг с другом. Какую форму примет пленка, разделяющая эти пузыри? Какие углы образуются между поверхностями пузырей и пленкой в местах их соприкосновения?

Решение. Пусть $R > r$. Давление внутри мыльного пузыря радиусом R больше атмосферного давления на величину $\Delta p_1 = \frac{4\sigma}{R}$, а внутри другого пузыря – больше на величину $\Delta p_2 = \frac{4\sigma}{r}$. Поскольку $\Delta p_1 < \Delta p_2$, то разность этих давлений должна быть уравновешена давлением искривленного участка пленки, натянутой между двумя пузырями. Следовательно, $\frac{4\sigma}{R} + \frac{4\sigma}{R_x} = \frac{4\sigma}{r}$, где R_x – радиус кривизны участка пленки между пузырями. Отсюда $R_x = \frac{Rr}{R-r}$.

Рассмотрим малый элемент границы соприкосновения пузырей и пленки. Три силы поверхностного натяжения, действующие на этот элемент со стороны поверхностей пузырей и пленки, равны между собой по модулю и уравновешивают друг друга (их векторная сумма равна нулю). Это возможно только в том случае, когда углы между векторами указанных сил равны 120°.

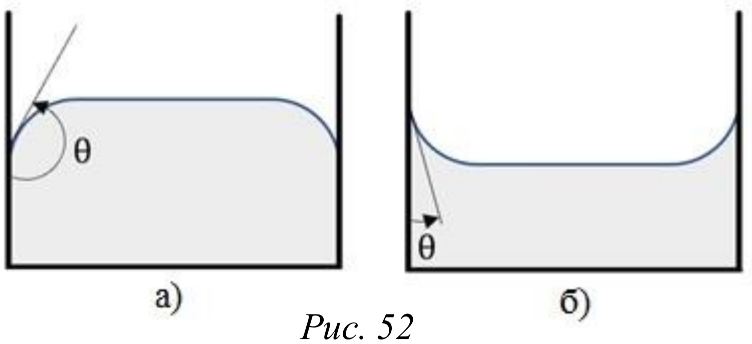


Рис. 52

Вблизи границы между жидкостью, твердым телом и газом форма свободной поверхности жидкости зависит в основном от сил взаимодействия молекул жидкости с молекулами твердого тела (взаимодействием с молекулами газа или пара чаще всего можно пренебречь). Если силы взаимодействия молекул жидкости с молекулами твердого тела меньше сил взаимодействия между молекулами самой жидкости, то жидкость *не смачивает* поверхность твердого тела. В этом случае поверхность жидкости составляет с поверхностью твердого тела некоторый тупой угол θ, характерный для данной пары «жидкость – твердое тело» (рис. 52, *а*). Угол θ называется краевым углом. Если силы взаимодействия между молекулами жидкости и твердого тела превосходят силы взаимодействия молекул жидкости друг с другом, то краевой угол θ оказывается острым (рис. 52, *б*). В этом случае говорят, что жидкость *смачивает* поверхность твердого тела. При полном смачивании $\theta = 0°$, при полном несмачивании $\theta = 180°$. Отметим, что угол θ отсчитывается изнутри жидкости.

Если поместить на горизонтальную поверхность твердого тела маленькую каплю жидкости, то она будет по-разному вести себя в зависимости от того, смачивает эта жидкость данное твердое тело или не смачивает. В первом случае капля растечется по поверхности тонким слоем, а во втором – примет практически сферическую форму.

Следует иметь в виду, что коэффициент поверхностного натяжения σ сильно зависит от температуры – при увеличении температуры он уменьшается, обращаясь в ноль при критической температуре (поскольку при этой температуре исчезает граница между жидкостью и ее насыщенным паром).

Пример 2. В тонкой горизонтально расположенной цилиндрической стеклянной трубке находится капля: а) воды; б) ртути. Что произойдет с каплей, если один конец трубки подогреть, а температуру второго конца оставить прежней? Вода смачивает чистое стекло, а ртуть не смачивает.

Решение. Поскольку коэффициент поверхностного натяжения зависит от температуры (уменьшается с ее ростом), при нагревании одного конца трубки – например, левого – силы поверхностного натяжения справа начнут доминировать. Поэтому водяная капля, которая смачивает стекло, поползет вправо, а ртутная капля, которая не смачивает стекло, поползет влево.

Таким образом, жидкость, смачивающая трубку, будет двигаться по ней в направлении от нагретого конца к холодному. Поэтому мокрая обувь лучше сохнет, если ее подогревать изнутри – тогда вода будет двигаться в порах кожи, из которой изготовлена обувь, в сторону более холодной внешней поверхности, откуда будет эффективно испаряться.

В связи с этой задачей полезно предложить обучающимся подумать, почему мокрые кирпичи нельзя сушить в печи, грея их со всех сторон, а нужно подогревать их лишь с одной стороны.

Капиллярными явлениями называют подъем или опускание жидкости в трубках малого диаметра – капиллярах. Жидкости, смачивающие капилляры, поднимаются по ним, не смачивающие – опускаются.

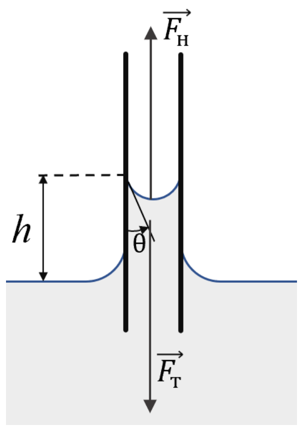


Рис. 53

На рисунке 53 изображена капиллярная трубка радиусом r, опущенная нижним концом в смачивающую жидкость плотностью ρ. Верхний конец капилляра открыт. Подъем жидкости в капилляре продолжается до тех пор, пока сила тяжести $F_т$, действующая на столб жидкости высотой h в капилляре, не станет равной по модулю результирующей $F_н$

сил поверхностного натяжения, действующих вдоль границы соприкосновения жидкости с поверхностью капилляра:

$$F_т = F_н, \quad \text{где} \quad F_т = mg = \rho h \pi r^2 g, \qquad F_н = \sigma \cdot 2\pi r \cos\theta.$$

Отсюда следует:

$$h = \frac{2\sigma \cos\ \theta}{\rho g r}.$$

При полном смачивании $\theta = 0°, \cos\ \theta = 1$. В этом случае $h = \frac{2\sigma}{\rho g r}$. При полном несмачивании $\theta = 180°$, $\cos\theta = -1$ и, следовательно, $h < 0$. Уровень несмачивающей жидкости в капилляре опускается ниже уровня жидкости, в которую опущен капилляр.

Эту задачу можно решить и с помощью формулы, выражающей давление под искривленной поверхностью жидкости. Радиус кривизны поверхности жидкости в капилляре равен $R = r/\cos\ \theta$. Избыточное давление, связанное с искривлением поверхности жидкости, должно уравновешиваться гидростатическим давлением столба жидкости в капилляре:

$$\rho g h = \frac{2\sigma}{R} = \frac{2\sigma \cos\ \theta}{r}.$$

Отсюда получается прежний ответ для h.

Пример 3. Нижний конец вертикальной капиллярной трубки опущен в воду плотностью ρ с коэффициентом поверхностного натяжения σ. Какое количество теплоты Q выделится при поднятии жидкости по этому капилляру? Краевой угол принять равным нулю (полное смачивание).

Решение. Жидкость поднимается согласно формуле, полученной выше, на высоту $h = \frac{2\sigma}{\rho g r}$. Масса столба жидкости $m = \pi r^2 h \rho$, поэтому потенциальная энергия этого столба в поле тяготения Земли:

$$E_p = \frac{mgh}{2} = \frac{2\pi\sigma^2}{\rho g}.$$

Постоянная по модулю сила поверхностного натяжения совершает при поднятии уровня жидкости на высоту h работу

$$A = \sigma \cdot 2\pi r \cdot h = \frac{4\pi\sigma^2}{\rho g}.$$

На увеличение потенциальной энергии E_p идет только половина этой работы. Следовательно,

$$Q = A - E_p = \frac{2\pi\sigma^2}{\rho g}.$$

Пример 4. Открытую с обоих концов тонкую длинную вертикальную стеклянную капиллярную трубку, радиус канала которой $r = 1$ мм, закрыли снизу и наполнили водой. Затем нижний конец трубки открыли, при этом часть воды вылилась (рис. 54). Плотность воды ρ, коэффициент поверхностного натяжения σ, смачивание полное. Какова высота столба оставшейся в капилляре воды?

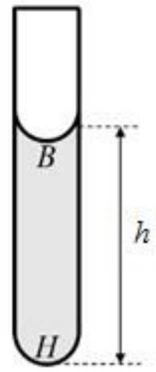


Рис. 54

Решение. Вес столба воды в поставленной вертикально трубке удерживается благодаря наличию сверху и снизу менисков (так называются искривленные участки поверхности жидкости). Давление в точке B под верхним мениском: $p_{\text{в}} = p_0 - \frac{2\sigma}{r}$, где p_0 – атмосферное давление. В точке H над нижним мениском давление равно: $p_{\text{н}} = p_{\text{в}} + \rho g h$, где h – искомая высота столба воды. С другой стороны, $p_{\text{н}} = p_0 + \frac{2\sigma}{r}$.

Следовательно,

$$p_{\text{н}} = p_0 + \frac{2\sigma}{r} = p_{\text{в}} + \rho g h = p_0 - \frac{2\sigma}{r} + \rho g h.$$

Отсюда:

$$h = \frac{4\sigma}{\rho g r}.$$

Пример 5. Между двумя горизонтальными квадратными стеклянными пластинками находится прослойка воды толщиной $d = 0{,}3$ мм. Какую силу необходимо приложить к пластинкам перпендикулярно их поверхностям, чтобы оторвать пластинки друг от друга? Длина стороны пластинки $a = 10$ см, коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma = 7{,}3 \cdot 10^{-2}$Н/м, смачивание полное.

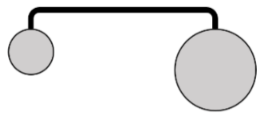
Решение. Форму искривленной поверхности жидкости между пластинками можно считать цилиндрической с радиусом $R = \frac{d}{2}$. Поэтому давление в жидкости между пластинами меньше атмосферного на величину $\Delta p = \frac{\sigma}{R} = \frac{2\sigma}{d}$. Это означает, что пластинки прижаты друг к другу силой $F = \Delta p S$, где $S = a^2$ — площадь пластинки. Чтобы оторвать одну пластинку от другой, именно эту силу и нужно преодолеть. В результате, подставляя численные данные, находим:

$$F = \frac{2\sigma}{d} a^2 \approx 4{,}9 \text{ Н.}$$

Однако, как оказывается, ничего не стоит разъединить пластинки, опустив их в воду. Можно также облегчить задачу, сдвигая их друг относительно друга.

Домашнее задание

Задача 1. В воду плотностью ρ вертикально опущен стеклянный капилляр, стенки которого полностью смачиваются водой. Внутри капилляра столбик воды поднялся на высоту h. Атмосферное давление равно p_0. Чему равно давление воды в капилляре непосредственно под мениском? (Ответ: $p = p_0 - \rho g h$.)



Задача 2. Два мыльных пузыря разных размеров соединены трубкой, которая перекрыта краном. Какой из этих пузырей будет сдуваться, если открыть кран? (Ответ: меньший.)

Задача 3. Чтобы мазь лучше впитывалась в смазанные лыжные ботинки, их нагревают. Как нужно нагревать ботинки – снаружи или изнутри? (Ответ: снаружи.)

Задача 4. Нижний конец стеклянной капиллярной трубки радиусом $r = 0{,}05$ см опущен в воду на глубину $h = 2$ см. Какое минимальное давление необходимо создать, чтобы выдуть пузырек воздуха через нижний конец этой трубки? Плотность воды $\rho = 1$ г/см^3, коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma = 7{,}3 \cdot 10^{-2}$ Н/м, смачивание полное. (Ответ: $\Delta p \approx 490$ Па.)

Задача 5. Жидкость плотностью ρ, полностью смачивающая капиллярную трубку, поднялась в ней на высоту h. Чему равно давление в жидкости внутри капилляра на высоте $h/4$ от поверхности воды? Атмосферное давление равно p_0. (Ответ: $p = p_0 - \frac{\rho g h}{4}$.)

Задача 6. В капиллярной трубке, опущенной вертикально в воду на глубину l, вода поднялась на высоту h. Нижний конец трубки закрывают, вынимают ее из воды и снова открывают. Определите длину L столбика воды, оставшейся в трубке. (Ответ: $L = 2h$, если $l > h$, или $L = l + h$, если $l \leq h$.)

Литература

Буздин А. И., Кротов С. С. Поверхностное натяжение и капиллярные явления // Квант. – 1988. – № 4. – С. 56–61. – URL: http://kvant.mccme.ru/1988/04/p56.htm.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования (утв. Приказом Минобрнауки России от 17.05.2012 г. № 413; в ред. Приказа Минобрнауки России от 29.12.2014 г. № 1645, от 31.12.2015 г. № 1578, от 29.06.2017 г. № 613 и Приказа Минпросвещения России от 24.09.2020 г. № 519, от 11.12.2020 г. № 712, от 12.08.2022 г. № 732).

2. Приказ Министерства просвещения Российской Федерации от 18.05.2023 № 371 «Об утверждении федеральной образовательной программы среднего общего образования» (Зарегистрирован Минюстом России 12.07.2023 № 74228).

3. Рабочая программа среднего общего образования. Физика. Углубленный уровень (для 10–11 классов образовательных организаций). – М.: ФГБНУ «ИСРО РАО», 2022. – 75 с.

4. Физический энциклопедический словарь / гл. ред. А. М. Прохоров. – М.: Сов. энцикл., 1983. – 928 с.

5. Физическая энциклопедия / гл. ред. А. М. Прохоров. – М.: Сов. энцикл., 1988.

6. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. Т. I: Механика. – М.: Изд-во МФТИ, 2005. – 560 с.

7. *Иродов И. Е.* Механика. Основные законы. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2014. – 309 с.

8. *Бутиков Е. И., Быков А. А., Кондратьев А. С.* Физика в примерах и задачах. – М.: МЦНМО, 2023. – 516 с.

9. *Сивухин Д. В*. Общий курс физики. Т. II: Термодинамика и молекулярная физика. – М.: Физматлит, 2005. – 544 с.

10. Физика. 3800 задач для школьников и поступающих в вузы / Н. В. Турчина и др. – М.: Дрофа, 2000. – 671 с.

11. Задачи по физике для поступающих в вузы / Г. А. Бендриков, Б. Б. Буховцев, В. В. Керженцев, Г. Я. Мякишев. – М.: Физматлит, 2003. – 333 с.

12. Сборник задач по элементарной физике: пособие для самообразования / Б. Б. Буховцев и др. – М.: УНЦ ДО МГУ, 2004. – 441 с.

13. Буздин *А. И., Ильин В. А., Кривченков И. В. и др.* Задачи московских физических олимпиад / под ред. С. С. Кротова. – М.: Наука, 1988. – 192 с.

14. *Варламов С. Д., Зинковский В. И., Семенов М. В. и др.* Задачи Московских городских олимпиад по физике. 1986–2005. Приложение: олимпиады 2006 и 2007 / под ред. М. В. Семенова, А. А. Якуты – М.: Изд-во МЦНМО, 2007. – 696 с.

15. *Варламов С. Д., Вишнякова Е. А., Ромашка М. Ю. и др.* Задачи Московских олимпиад школьников по физике. 2006–2016 / под ред. М. В. Семенова, А. А. Якуты. – М.: МЦНМО, 2022. – 464 с.

16. *Буздин А. И., Зильберман А. Р., Кротов С. С.* Раз задача, два задача… – М.: Наука, 1990. – 240 с. (Библиотечка «Квант»; Вып. 81).

17. *Слободецкий И. Ш., Асламазов Л. Г.* Задачи по физике. – М.: Бюро Квантум, 2001. – 160 с. (Библиотечка «Квант»; Вып. 86).

18. Всероссийские олимпиады по физике. 1992–2004 / под ред. С. М. Козела, В. П. Слободянина. – М.: Вербум-М, 2005. – 534 с.

19. Всероссийские олимпиады по физике. 2005–2017 / сост., отв. ред. А. М. Киселев, В. П. Слободянин. – М.: МФТИ, 2018. – 176 с.

20. Задачник «Кванта». Физика. Ч. 1 / под ред. А. Р. Зильбермана и А. И. Черноуцана. – М.: Бюро Квантум, 2010. – 192 с. (Библиотечка «Квант»; Вып. 118. Приложение к журналу «Квант» № 5/2010).

21. Задачник «Кванта». Физика. Ч. 2. – М.: МЦНМО, 2011. – 192 с. (Библиотечка «Квант+»; Вып. 120. Приложение к журналу «Квант+» № 2/2011).

22. Задачник «Кванта». Физика. Ч. 3 / под ред. А. И. Черноуцана. – М.: МЦНМО, 2012. – 160 с. (Библиотечка «Квант»; Вып. 123. Приложение к журналу «Квант» № 1/2012).

23. *Зильберман А. Р.* Школьные физические олимпиады. – М.: МЦНМО, 2019. – 256 с.

24. *Чудновский А. В., Григорьев Ю. М., Муравьев В. М., Потапов В. Ф.* Теоретические задачи по физике. Международная олимпиада «Туймаада». 1994–2012 / под ред. А. В. Чудновского. – М.: МЦНМО, 2013. – 262 с.

25. Сборник задач по физике. Механика. Кинематика. 9 кл. / под ред. М. Ю. Замятнина. – М., 2021. – Т. 1. – 236 с.

26. Сборник задач по физике. Механика. Динамика. Статика. Законы сохранения. 9 кл. / под ред. М. Ю. Замятнина. – М., 2021. – Т. 2. – 424 с.

Научное издание

А. А. Якута, В. Т. Корнеев, Г. Д. Корнеева, Е. Д. Кочергина,
Д. В. Подлесный, Т. В. Саушкина, К. М. Шитикова

ФИЗИКА (УГЛУБЛЕННЫЙ УРОВЕНЬ). РЕАЛИЗАЦИЯ ТРЕБОВАНИЙ ФГОС СРЕДНЕГО ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Методическое пособие для учителя

Научный редактор М. В. Семенов

101000, г. Москва, ул. Жуковского, д. 16
ФГБНУ «Институт стратегии развития образования»
Тел. +7(495)621–33–74
info@instrao.ru
https://instrao.ru

Подготовлено к изданию 08.08.2023.
Формат 60×90 1/8.
Усл. печ. л. 7.

ISBN 978-5-6049296-1-2